



物理学中的计算机程序



# geodualphysics:一个高性能的 SPH 求解器，用于大变形建模的 岩土材料与多体系统的双向耦合

冯若峰<sup>a, \*</sup>, 赵继东<sup>a, \*</sup>, Georgios Fournakos<sup>b</sup>, Benedict D Rogers<sup>b</sup><sup>a</sup> 中国香港科技大学土木与环境工程系<sup>b</sup> 英国曼彻斯特大学工程学院

## ARTICLE INFO

Andrew Hazel 教授编辑

关键词:

光滑粒子流体力学 GPU

大变形颗粒流  
dualspphysics

## Abstract

本文介绍了 geodualphysics，一个开源的图形处理单元(GPU)加速的光滑粒子流体力学(SPH)求解器，旨在模拟大变形地质材料及其与多体系统的相互作用。基于流行的开源 SPH 求解器 dualspphysics，该求解器利用 CUDA 并行化的高度并行化 SPH 方案，同时将其能力扩展到单个 GPU 上具有  $10^8$  量级粒子的大变形地质力学问题。SPH 地质力学模型通过稳定和精确分解应力场的无噪声应力处理技术以及扩展修改的动态边界条件(mDBC)来增强，确保了固体边界建模的一阶一致性。此外，dualspphysics 和多体动力学求解器 Project Chrono 之间的耦合接口适用于模拟岩土材料和多个相互作用的刚体之间的相互作用。基准验证证实了求解器在解决岩土失效、固体边界上的冲击力以及岩土材料-多体系统相互作用方面的准确性。新实现的 CUDA 内核的 GPU 分析表明，它们的性能指标与原始 dualspphysics 求解器相似。性能评估表明，与现有的 SPH 地质力学求解器相比，它节省了 30-50% 的内存使用，提高了计算效率，实现了具有数千万粒子的系统的实际模拟速度，与优化的多核 CPU 实现相比，速度提高了 180 倍。这些进步使 geodualphysics 成为一种通用的、高效的

用于高保真模拟复杂岩土系统的工具。

节目简介:节目名称:geodualphysics

CPC 库链接到程序文件:<https://doi.org/10.17632/z4sh62y97g.1>Licensing

条款:GNU 较宽松通用公共许可证

编程语言:c++和 CUDA

问题性质:模拟岩土材料的大变形及其与可移动或固定固体的相互作用，对于解决滑坡、土壤-机器相互作用和越野车辆移动性等工程挑战至关重要。虽然光滑粒子流体力学(SPH)方法非常适合在这些情况下模拟基于连续体的地质材料行为，但关键的计算障碍仍然存在，包括:(1)大变形状态下的数值不稳定性和非物理噪声，(2)将模拟缩放到现实世界系统中数百万粒子的效率低下，以及(3)可变形岩土材料和多体系统之间鲁棒、双向耦合的框架不足。克服这些限制需要稳定的 SPH 公式、高性能计算架构以及与多体动力学求解器的双向耦合。

解决方法:geodualspphysics 解决方案通过以下方式解决上述挑战:(1)地质材料的稳定 SPH 公式，具有无噪声应力处理以消除大变形中的伪振荡，以及用于一阶一致固体边界建模的扩展修改动态边界条件(mDBC);(2)继承了 dualspphysics 的基于 cuda 的高性能 GPU 并行化，实现了对数千万个粒子的高效模拟;(3)通过。与 Project Chrono 实现双向耦合

\* Corresponding authors.

E-mail addresses: [ruofengfeng@ust.hk](mailto:ruofengfeng@ust.hk) (R. Feng), [jzhao@ust.hk](mailto:jzhao@ust.hk) (J. Zhao).<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2025.109965>

Received 18 June 2025; Received in revised form 11 November 2025; Accepted 20 November 2025

Available online 2 December 2025

0010-4655/© 2025 Elsevier B.V. All rights are reserved, including those for text and data mining, AI training, and similar technologies.

DSPHChronoLib 库，它集成了碰撞检测、摩擦接触模型和关节约束，以解决可变形岩土材料和多体系统之间的相互作用。

1. 简介

地质材料及其流动行为的模拟在各种科学和工程学科中有着广泛的应用，包括雪和岩石雪崩、泥石流、土壤切割和耕作以及地形力学。在这类问题的数值模拟中，主要的挑战是存在自由表面和具有复杂拓扑变化的极大变形。离散方法，如离散单元法(DEM)[1-3]，基于连续体的无网格方法，包括物质点法(MPM)[4-6]，光滑颗粒流体力学(SPH)[7-10]，颗粒有限元法(PFEM) [11,12]，和周动力学(PD)[13-15]通常是两种类型的数值方法，它们已经证明有能力解决这些挑战。

DEM 擅长于模拟颗粒材料的行为和不连续的相互作用，但在大规模的实际颗粒流动中，完全解决的 DEM 模拟通常会产生很大的自由度，提出了高昂的计算成本和数据存储挑战。对于这样的大规模应用，基于连续体的无网格方法尤其具有优势。在上述无网格方法中，SPH 是一种真正的无网格拉格朗日方法。SPH 中控制偏微分方程的积分不需要网格，从而避免了网格相关的约束和数值问题。近年来，SPH 在有效模拟地质力学问题方面越来越受欢迎(例如[16-23])。

尽管 SPH 在模拟高度非线性的自由表面流动方面显示出许多优势，但其相对较高的计算成本是大规模模拟的主要挑战。由于单粒子的 SPH 插值需要计算与大量邻居的相互作用，而显式格式需要小的时间步长[24]。然而，SPH 的局部插值特性和明确的公式使其特别适合并行计算。利用并行计算架构的进步，研究人员尝试加速地质力学问题中的 SPH 模拟。Peng 等人在岩土工程问题的 SPH 建模中率先使用了 NVIDIA 计算统一设备架构(CUDA)。在 GTX 1080Ti 11 GB 上，以每秒 0.41 个时间步长，平滑长度(h)与初始粒子距离(dp)的比值为  $h/dp = 2.8$ ，实现了最多 1500 万个粒子的模拟。Yang 等人开发了一种并行 SPH 方案，用于使用消息传递接口(MPI)通信模拟颗粒流，该方案可在大型 CPU 集群上扩展。他们的实现特点是在 512 个 CPU 内核上运行 1170 万个粒子，在 12-24 小时(1.62-3.24 步/秒)内模拟 14 万个时间步。Huang 等人[27]使用 dualsphysics (v.4.0)模拟了多达 5000 万个颗粒的颗粒流，在 TITAN RTX 24 GB 上进行 1 秒物理时间模拟需要一周的计算时间。对更大规模、更高分辨率模拟的激增需求，正在推动在计算速度和内存消耗方面开发更高效的求解器。

在过去的十年中，已经为地质力学中的 SPH 应用开发了几个开源代码，例如 Linux 平台上的 c++ 代码 PersianSPH [28]，gpu 加速的 c++ /CUDA 代码 LOQUAT[25]和 Fortran 代码 SPHERA[29]。虽然现有的开源求解器已经能够有效地模拟地质材料，但很少有开源求解器被扩展到模拟与结构相互作用的地球物理流动。最近发布的软件 GeoXPM ([http ps://www.geoxpm.com](http://www.geoxpm.com))，由 Bui et al.[30]开发，提供了模拟涉及土壤-结构相互作用的复杂大变形地质力学问题的可能性。然而，该软件尚未开源，并采用了基于 cpu 的并行方案，并对

公开发布版本应用了一定的粒子数限制。此外，现有的求解器主要采用高达零阶一致性的边界处理以及 Shepard 滤波来降低大变形时应力场中的数值噪声。众所周知，这些技术会在分析中引入数值波动和经验主义。Feng 等人最近在边界条件和平滑技术方面的发展，[31]已经成为模拟地质材料的另一种框架，具有更高的精度和稳定性。

dualsphysics 是一个基于 c++ /CUDA/ OpenMP 的开源 SPH 求解器，用于自由表面流模拟，兼容 Windows 和 Linux 操作系统[32]。近年来，dualsphysics 作为解决流体动力学问题的有力工具和 SPH 发展的基础而越来越受欢迎。dualsphysics 求解器的几个变体和增强功能已经开发出来，以结合复杂的物理、先进的算法和方法改进，例如基于 sph 的流固相互作用结构建模的 dualsphysics[33]，用于提高计算效率的 vecdualsphysics [34]，用于流体动力学与多体动力学耦合的 dualsphysics - chrono，用于液滴动力学的 dualsphysics 与表面张力模型[36]，用于提高流体模拟精度的 dualsphysics +[37]，以及用于多尺度建模的可变分辨率 dualsphysics[38]。扩展 dualsphysics 来解决地质力学问题将受益于其不断增长的社区和新合并的物理、算法和并行化优化。对地质力学模拟感兴趣的新用户也可以利用求解器强大的预处理/后处理工具、广泛的文档/教程和积极的社区支持。

这项工作提出了 geodualsphysics，这是 dualsphysics 代码的一个新分支，用于地质力学，地球物理和岩土工程中的大规模大变形问题。geodualsphysics 继承了来自原始 dualsphysics 代码的高度并行化 SPH 框架，并进一步实现了具有稳定，无噪声处理和固体边界精确分辨率的岩土材料模拟。通过包含 DSPHChronoLib (Martínez-Estévez et al.[35])，也实现了地球物理流和多个相互作用结构之间的双向耦合。特别关注新实现功能的性能，其中使用 NVIDIA Nsight Compute 进行优化，以最大限度地提高 GPU 占用率，同时最大限度地降低内存要求。

本文的其余部分组织如下:第 2 节介绍了岩土材料建模的控制方程和 SPH 公式。在第 3 节中，介绍了 geodualsphysics 和 Project Chrono 之间的双向耦合，用于地质材料与多体系统之间的相互作用。接下来是第 4 节中描述的新求解器的代码文档。第 5 节介绍了验证所采用的基准测试。第 6 节展示了新求解器的性能分析。最后，在第 7 节总结了结论。

2. 岩土材料的数值模型

2.1. SPH 基本原理

在 SPH 中，计算域被离散为一组粒子(即计算点)，其中每个粒子携带物理量并根据控制方程运动。由于不采用计算网格，SPH 依赖于基于点的插值。点  $\mathbf{x}$  处的值是使用可微的、紧支持的内核计算的

函数  $W$ ，其值随着粒子之间的距离  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  减小，并取决于平滑长度  $h$ 。SPH 插值积分逼近和离散逼近两步实现。场函数  $f(\mathbf{x})$  在点  $\mathbf{x}$  处的值的积分近似定义为:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \tag{1}$$

式中  $\Omega$  is 为局部插值区域， $\langle \dots \rangle$  为 SPH 插值。

Eq.(1)的离散形式可以写成:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle_i = \sum_{j=1}^N f_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) V_j \tag{2}$$

其中下标  $i$  和  $j$  分别表示插值粒子及其相邻粒子， $N$  表示分布在插值域中的粒子数， $f_j = f(\mathbf{x}_j)$ ， $V_j$  表示粒子  $j$  的关联体积。

对于函数  $\nabla f(\mathbf{x})$  的梯度，其在 SPH 中的积分近似为:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \tag{3}$$

Eq.(3)的离散近似为:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle_i = - \sum_{j=1}^N f_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) V_j \tag{4}$$

有关微分算子(包括梯度、散度和拉普拉斯算子)的 SPH 近似的进一步细节，请参阅 Violeau 和 Rogers[39]。

在这项工作中，采用了抗团块不稳定性稳定的 5 阶 Wendland 核  $C2$ 。核函数采用如下形式，

$$W(q, h) = \begin{cases} \alpha_d \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (2q + 1) & 0 \leq q \leq 2 \\ 0 & q > 2 \end{cases} \tag{5}$$

其中  $\alpha_d$  为归一化常数。在一、二、三维空间中， $\alpha_d$  分别等于  $3/4h$ 、 $7/(4\pi h^2)$ 、 $21/(16\pi h^3)$ ， $q$  是  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{x}'$  点之间的无因次距离，定义为  $q = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/h$ 。

2.2. 控制方程

地质材料连续体表示的质量和动量平衡方程的拉格朗日形式为:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \tag{7}$$

其中  $\mathbf{v}$  表示速度， $\boldsymbol{\sigma}$  表示柯西应力张量， $\rho$  表示密度， $\mathbf{b}$  是单位体积的物体力。

2.3. 本构模型

为了闭合控制方程 Eqs(6)和(7)，需要一个额外的本构方程。在 geodynamics 中，实现并测试了弹塑性 Drucker-Prager 模型。通过修改时间积分中的功能，其他高级本构模型可以很容易地在新代码中实现。Jaumann 模型

表 1

半隐式应力更新算法。

Algorithm1 Stress update algorithm	
1	//-Interaction Forces
2	for each particle $i$ do
3	Compute the strain rate and spin rate tensor
4	Compute the stress rate based on elastic stiffness $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$
5	end for
6	//-Time integration
7	for each particle $i$ do
8	Elastic trial solution $\boldsymbol{\sigma}_{t+dt}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_t + \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt$ ; $\boldsymbol{\kappa}_{t+dt} = \boldsymbol{\kappa}_t$
9	Check yielding condition $f(\boldsymbol{\sigma}_{t+dt}^{trial}, \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}) < 0$
10	If $f(\boldsymbol{\sigma}_{t+dt}^{trial}, \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}) < 0$ then
11	Update stress as elastic trial solution $\boldsymbol{\sigma}_{t+dt} = \boldsymbol{\sigma}_{t+dt}^{trial}$ ; $\boldsymbol{\kappa}_{t+dt} = \boldsymbol{\kappa}_t$
12	else
13	Perform return mapping $\boldsymbol{\sigma}_{t+dt} = \boldsymbol{\sigma}_{t+dt}^{trial} - d\boldsymbol{\sigma}_p$ ; $\boldsymbol{\kappa}_{t+dt} = \boldsymbol{\kappa}_t + d\boldsymbol{\kappa}$
14	end if
15	end for

为保证刚体旋转作用下应力的客观性，采用应力率。采用 Bui 和 Nguyen[9]的半隐式应力更新算法，算法如表 1 所示。应力更新中还计算了等效偏塑性应变  $\kappa$ 。

在该方法中，首先根据弹性刚度矩阵计算应力率，

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{8}$$

其中  $\mathbf{D}_e$  为弹性刚度张量， $\boldsymbol{\varepsilon}$  为应变张量， $\boldsymbol{\omega}$  为自旋张量。

应变速率张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  and 与自旋速率张量  $\boldsymbol{\omega}$  相关

速度梯度由运动学关系根据，

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \tag{9a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T) \tag{9b}$$

利用弹性假设计算的应力率得到应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}^{trial}$ [40]的试解。如果得到的应力条件达到屈服条件  $f$ ，则根据，应用塑性返回映射，

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\boldsymbol{\sigma}^{trial} - \mathbf{D}_e : \left( d\lambda \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \tag{10}$$

其中  $g$  为塑性势函数， $d\lambda$  为塑性乘数。

根据 Drucker-Prager 屈服准则，屈服函数和塑性势函数为:

$$f = \alpha_\phi I_1 + \sqrt{J_2} - k_c \tag{11a}$$

$$g = \alpha_\psi I_1 + \sqrt{J_2} \tag{11b}$$

其中  $I_1$  和  $J_2$  分别表示第一主应力不变量和第二偏应力， $\alpha_\phi$  and  $k_c$  是 Drucker-Prager 常数，可与黏聚力  $c$  和内摩擦相关，根据，对于平面应变条件，

$$\alpha_\phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}}, k_c = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \phi}} \tag{12a}$$

对于 Drucker-Prager 屈服面限制 Mohr-Coulomb 屈服面的三维条件，

$$\alpha_\phi = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}, k_c = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \tag{12b}$$



表示莫尔-库仑屈服面，

$$\alpha_\phi = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)}, k_c = \frac{6\cos\phi}{\sqrt{3}(3+\sin\phi)} \quad (12c)$$

$\alpha_\phi$  是一个膨胀系数，其值与膨胀角  $\psi$  的关系类似于  $\alpha_\phi$  和摩擦角  $\phi$  之间的关系。

本构模型的实现已经通过 Bui 和 Nguyen[9]提出的简单剪切试验得到验证。验证的细节可以在 Feng et al.[31]中找到。

2.4. SPH 离散化

对于代表岩土材料的粒子  $i$ ，控制方程(式 6 和 7)以及应变速率、自旋速率方程(式 9a 和 9b)和位置方程的 SPH 离散形式表示为：

$$\left\langle \frac{d\rho}{dt} \right\rangle_i = \rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_i^\alpha - v_j^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \quad (13a)$$

$$\left\langle \frac{dv^\alpha}{dt} \right\rangle_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g^\alpha \quad (13b)$$

$$\langle \dot{\epsilon}^{\alpha\beta} \rangle_i = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right) \quad (13c)$$

$$\langle \dot{\omega}^{\alpha\beta} \rangle_i = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\beta - v_i^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} \right) \quad (13d)$$

$$\frac{dx_i^\alpha}{dt} = v_i^\alpha \quad (13e)$$

其中下标  $ij$  表示函数  $f_{ij}=f_i-f_j$  中值的差值， $g^\alpha$  表示引力。为清晰起见，这些方程以指示符号和爱因斯坦约定表示。

2.5. 稳定技术

2.5.1. 人工粘度

当控制方程中没有数值耗散项时，SPH 可能由于中心和配位方案而表现出非物理振荡和数值不稳定性。通常采用经典的人工黏度项[41]来耗散这些振荡并使数值算法稳定。在动量方程(13b)的压力项中引入人工粘性项的方式如下：

$$\left\langle \frac{dv^\alpha}{dt} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta} + \sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_i \rho_j} - \Pi_{ij} \delta^{\alpha\beta} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g^\alpha \quad (14)$$

式中，

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_s \mu_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & v_{ij}^\beta x_{ij}^\beta \leq 0 \\ 0 & v_{ij}^\beta x_{ij}^\beta > 0 \end{cases} \quad (15a)$$

$$\mu_{ij} = \frac{h v_{ij}^\beta x_{ij}^\beta}{x_{ij}^\gamma x_{ij}^\gamma + \eta^2} \quad (15b)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = 0.5(\rho_i + \rho_j) \quad (15c)$$

$\alpha$  是用来控制数值耗散大小的经验常数，通常取  $\alpha = 0.1$  的值。为避免数值奇点，在分母中加入因子  $\eta = 0.1h$ 。Cs 为速度

材料的声速，它是根据，

$$c_s = \sqrt{(4G/3 + K)/\rho} \quad (16)$$

式中， $K$  和  $G$  分别为材料的体积模量和剪切模量。

2.5.2. 数值扩散项

在岩土材料大变形的 SPH 模拟中，由于方法的整理性，应力场中可能会产生高频噪声。为了使应力场平滑，引入数值扩散项来降低数值噪声。这涉及到根据[31]在应力率方程中加入应力扩散项，

$$\frac{d\sigma_i^{\alpha\beta}}{dt} = D_i^{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\epsilon}_i^{\gamma\delta} - \dot{\omega}^{\alpha\gamma} \sigma^{\gamma\beta} + \sigma^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^{\gamma\beta} + D_i^{\alpha\beta} \quad (17)$$

其中  $D_i^{\alpha\beta}$  是扩散项的一般形式如下，

$$D_i^{\alpha\beta} = 2\zeta h c_s \sum_j \psi_{ij}^{\alpha\beta} \frac{x_{ij}^\gamma}{x_{ij}^\gamma x_{ij}^\gamma + \eta^2} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\gamma} \frac{m_j}{\rho_j} \quad (18)$$

其中， $\zeta$  是控制扩散幅度的扩散系数。在大多数应用中，它的值通常取 0.1[42]。参数  $\psi_{ij}^{\alpha\beta}$  是扩散算子，根据公式的不同而变化。它的维数对应于扩散物理量的维数。为了保持应力率和应变率之间的一致性，应变率可能需要根据扩散项的大小进行校正。由于应变率在本工作中充当中间变量，因此不需要进行这样的修正。然而，当采用依赖于应变历史的本构模型时，这种调整可能变得必不可少。

在新的求解器中实现了两种类型的扩散算子。第一个公式源于 Molteni 和 Colagrossi[43]，由，

$$\psi_{ij}^{\alpha\beta} = \sigma_i^{\alpha\beta} - \sigma_j^{\alpha\beta} \quad (19)$$

第二种形式的应力扩散算子由 Feng 等人提出，可表示为：

$$\begin{cases} \psi_{ij}^{\alpha\beta} = \sigma_{ij}^{\alpha\beta} & \alpha \neq \beta \\ \psi_{ij}^{xx} = \sigma_{ij}^{xx} - K_0 \rho_0 g^{zz}_{ij} \\ \psi_{ij}^{yy} = \sigma_{ij}^{yy} - K_0 \rho_0 g^{zz}_{ij} \\ \psi_{ij}^{zz} = \sigma_{ij}^{zz} - \rho_0 g^{zz}_{ij} \end{cases} \quad (20)$$

式中  $K_0$  为 Jaky 静止时的土压力系数，定义为  $K_0 = 1 - \sin\phi$ ， $\rho_0$  为初始密度， $z_{ij}$  为  $z$  轴上粒子  $i$  与  $j$  之间的距离。

Eq.(19)给出的第一种形式近似于 Morris 等人的拉普拉斯算子，提供给定量的空间平滑。虽然它在非静态情况下表现良好，但由于核截断，它具有自由表面不一致性，这在涉及自由表面的静态情况下变得特别明显。第二种形式通过只考虑扩散项的动态分量来解决这个问题，它的公式(Eq. 20)在没有引力的情况下简化为第一种形式(Eq. 19)。Eq.(20)中实现的扩散项预计主要适用于重力主导的流动。对于任何类型的流动和一致配方的一般应用，需要对 Feng 等人的[45]中的扩散项进行扩展。关于不同配方的比较和扩散项降噪的深入分析的更多细节可以在 Feng 等人的[31]中找到。其他方法，如由 Khayyer et al.[46]提出的使用密度扩散来改善应力的各向同性部分，这证明了有利的节能，也可以被认为是应力平滑的潜在选择。



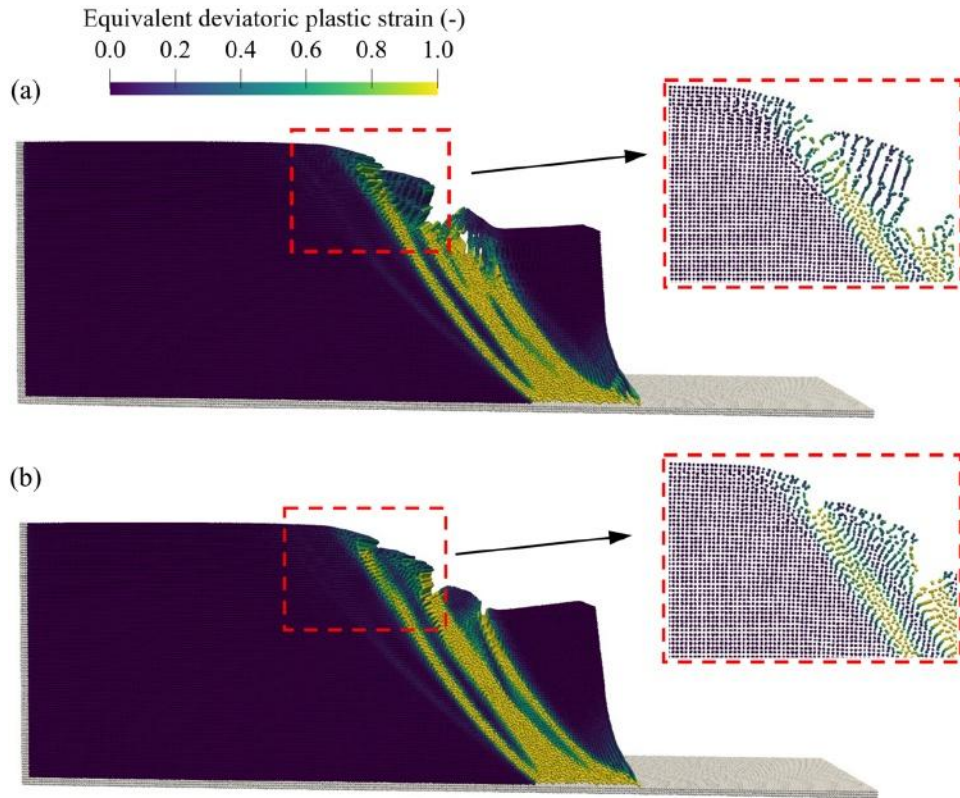


图 1. 粘性颗粒柱崩塌的三维建模(a)无移位(b)有移位。

2.5.3. 颗粒移位

在地质力学 SPH 应用中，由于拉伸不稳定性，可能会出现颗粒聚集和空洞等数值问题。这些影响在黏性材料模拟[9]中尤为明显。为了缓解这些问题，通常应用粒子移位技术来正则化粒子分布(例如[21,47,48])。为了改善粒子分布，保留了原始求解器 `dualspphysics` 中的移位算法。通过移位技术，每个粒子根据每个时间步结束时粒子的浓度  $C_i$  移动一定距离，使得密度较大区域的粒子向粒子浓度较低的区域移动[47]。自由面修正后的移动距离计算为：

$$\delta x_i^a = \begin{cases} -A_{FSC,i} A h v_{mag,i} dt \frac{\partial C_i}{\partial x^a} & \text{if } \partial_a x_i^a > A_{FST} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (21)$$

其中  $A$  为无量纲移动系数，其值与情况场景无关，默认为[48]，设为 2。 $v_{mag}$  为以  $v_{mag}$  计算的速度大小。 $I = \sqrt{\partial_a x_i^a \partial_a x_i^a}$ 。 $\partial_a x_i^a$  是与  $(\nabla \cdot \mathbf{x})_i$  等价的粒子散度， $A_{FST}$  是识别位于自由表面的粒子的阈值，其推荐值在 2D 时为 1.5，在 3D 时为 2.75。 $A_{FSC}$  是考虑自由面校正的移位系数，给出为：

$$A_{FSC,i} = \frac{\partial_a x_i^a - A_{FST}}{A_{FSM} - A_{FST}} \quad (22)$$

其中， $A_{FSM}$  为粒子散度的最大值，

$$A_{FSM} = \begin{cases} 2 & \text{for 2D} \\ 3 & \text{for 3D} \end{cases} \quad (23)$$

所采用的移位算法在模拟粘性颗粒材料中的性能如图 1 所示，图 1 显示了

使用移位算法和不使用移位算法时粘性颗粒柱坍塌的三维模拟结果。颗粒移位算法有效地减轻了因拉伸不稳定性而产生的非物理结块和空洞。然而，还需要注意的是，目前的移动方法采用简化的自由表面修正，例如防止在自由表面发生移动，与使用一致的自由表面修正技术的方法相比，在自由表面附近可能表现不佳，例如，由 Khayyer 等人提出的优化粒子移动(OPS)。通过一些额外的计算成本，一致的自由表面校正可以在自由表面附近导致更规则的粒子分布。修正地质力学问题 OPS 的一个例子可以在 Feng 等人的著作中找到。此外，Zhang 等人[37]的统一输运速度公式也可以视为改善自由表面附近粒子分布的一种选择。

对移位算法的进一步改进是引入保守性考虑，如 SPH-ALE 公式[50]和体积守恒移位[51]，以避免显式格式中非物理的、数值引起的体积膨胀或压缩。

值得一提的是，除了已实现的稳定技术外，SPH 中还有其他先进的方法可以解决上述流体和固体动力学应用中的稳定性问题，例如基于 `riemann` 的稳定项[52]，弹性结构动力学中的密度扩散[46]，以及沙漏控制方法[53,54]。这些技术在地质力学问题中的应用将在未来的研究中得到考虑。

2.6. 边界处理

2.6.1. 修正动态边界条件的扩展

由于边界附近粒子的核截断问题，边界处理是 SPH 中一个具有挑战性的问题。在 `geodualphysics` 中，Feng 等人[31]对颗粒材料建模的边界处理，它建立在修改的动态边界之上

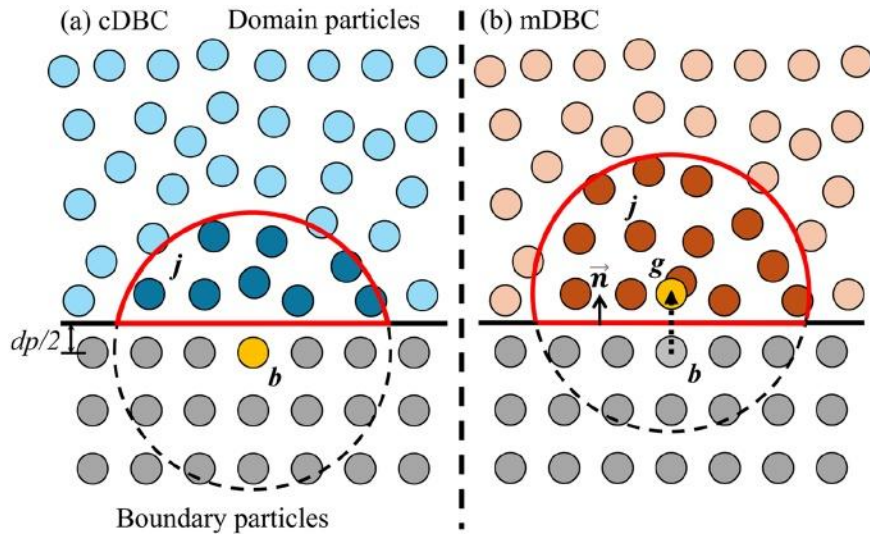


图 2。实体边界处理示意图(a)修正虚拟边界条件(cDBC);(b)修正动态边界条件(mDBC)。

条件(mDBC)由 English et al.[55], 使用。如图 2 所示, 创建了几层虚拟边界粒子, 用于完成被边界截断的粒子的核支持。对于每个边界粒子  $b$ , 都有幽灵节点  $g$  投射到计算域中, 以插值周围材料粒子  $j$  的场变量。

利用 Liu 和 Liu[56]引入的一阶一致 SPH 插值法计算鬼粒子的应力和应力梯度, 得到:

$$\mathbf{A}_g \cdot \begin{bmatrix} \sigma_g^{\alpha\beta} \\ \partial_x \sigma_g^{\alpha\beta} \\ \partial_y \sigma_g^{\alpha\beta} \\ \partial_z \sigma_g^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j \sigma_j^{\alpha\beta} W_{gj} V_j \\ \sum_j \sigma_j^{\alpha\beta} \partial_x W_{gj} V_j \\ \sum_j \sigma_j^{\alpha\beta} \partial_y W_{gj} V_j \\ \sum_j \sigma_j^{\alpha\beta} \partial_z W_{gj} V_j \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中重整化矩阵  $\mathbf{A}_g$  由式给出

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \sum_j W_{gj} V_j & \sum_j (x_j - x_g) W_{gj} V_j & \sum_j (y_j - y_g) W_{gj} V_j & \sum_j (z_j - z_g) W_{gj} V_j \\ \sum_j \partial_x W_{gj} V_j & \sum_j (x_j - x_g) \partial_x W_{gj} V_j & \sum_j (y_j - y_g) \partial_x W_{gj} V_j & \sum_j (z_j - z_g) \partial_x W_{gj} V_j \\ \sum_j \partial_y W_{gj} V_j & \sum_j (x_j - x_g) \partial_y W_{gj} V_j & \sum_j (y_j - y_g) \partial_y W_{gj} V_j & \sum_j (z_j - z_g) \partial_y W_{gj} V_j \\ \sum_j \partial_z W_{gj} V_j & \sum_j (x_j - x_g) \partial_z W_{gj} V_j & \sum_j (y_j - y_g) \partial_z W_{gj} V_j & \sum_j (z_j - z_g) \partial_z W_{gj} V_j \end{bmatrix} \quad (25)$$

边界粒子  $\sigma_{b^{*}}^{\alpha\beta}$  的最终应力值由鬼节点的位置外推, 使用一阶泰勒级数展开,

$$\sigma_b^{\alpha\beta} = \sigma_g^{\alpha\beta} + (x_b - x_g) \partial_x \sigma_g^{\alpha\beta} + (y_b - y_g) \partial_y \sigma_g^{\alpha\beta} + (z_b - z_g) \partial_z \sigma_g^{\alpha\beta} \quad (26)$$

重整化矩阵  $\mathbf{A}_g$  的可逆性由

, 计算其行列式。在行列式非常小(默认情况下, 小于 0.001)的情况下, 矩阵变得不适条件, 并使用零阶一致 SPH 插值(Shepard 函数), 给出如下:

$$\sigma_b^{\alpha\beta} = \sigma_g^{\alpha\beta} = \frac{\sum_j \sigma_j^{\alpha\beta} W_{gj} V_j}{\sum_j W_{gj} V_j} \quad (27)$$

除了零速度边界选项外, 还启用了无滑移边界条件。对于无滑移情况, 使用 Shepard 修正插值计算虚节点处的速度, 定义为:

$$v_g^a = \frac{\sum_j v_j^a W_{gj} V_j}{\sum_j W_{gj} V_j} \quad (28)$$

为了实现无滑移和无侵入条件, 边界粒子的速度设为:

$$v_b^a = 2v_M^a - v_g^a \quad (29)$$

其中  $v_M$  为固体边界的运动速度, 例如在

刚体动力学或具有规定运动的固体边界的情况。需要注意的是, 只有  $v_M$  是更新边界粒子位置的速度。

## 2.6.2. 修正的虚拟边界条件

扩展的 mDBC 提供了精确解析的选项

固体边界处的应力和速度条件。然而，在处理复杂的几何形状(如真实地形)时，对边界法线的要求呈现出复杂性。为此，geodualspphysics 还实现了一种新的替代边界处理方法，称为修正虚拟边界条件(corrected dummy boundary condition, cDBC)。与mDBC类似，在cDBC中使用了虚拟边界粒子，如图2(a)所示，但边界性质是通过边界粒子  $b$  对相邻材料粒子  $j$  的局部一阶插值来评估的，而不使用虚节点。虚拟边界粒子处的应力值计算公式为：

$$\sigma_b^{a\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_j \sigma_j^{a\beta} W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) W_{bj} V_j \\ \sum_j \sigma_j^{a\beta} \partial_x W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) \partial_x W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) \partial_x W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) \partial_x W_{bj} V_j \\ \sum_j \sigma_j^{a\beta} \partial_y W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) \partial_y W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) \partial_y W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) \partial_y W_{bj} V_j \\ \sum_j \sigma_j^{a\beta} \partial_z W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) \partial_z W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) \partial_z W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) \partial_z W_{bj} V_j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum_j W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) W_{bj} V_j \\ \sum_j \partial_x W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) \partial_x W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) \partial_x W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) \partial_x W_{bj} V_j \\ \sum_j \partial_y W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) \partial_y W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) \partial_y W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) \partial_y W_{bj} V_j \\ \sum_j \partial_z W_{bj} V_j & \sum_j (x_j - x_b) \partial_z W_{bj} V_j & \sum_j (y_j - y_b) \partial_z W_{bj} V_j & \sum_j (z_j - z_b) \partial_z W_{bj} V_j \end{vmatrix}} \quad (30)$$

与 mDBC 类似，如果 Eq.(30)的分母中的重正化矩阵的行列式非常小(默认情况下小于 0.001)，则内插减少为零阶 Shepard 内插。速度条件的执行也遵循方程(28)和(29)中 mDBC 的相同方式，但在边界粒子而不是鬼节点处进行插值。

### 2.7. 时间步进

控制方程方程(13a) ~ (13e)的时间积分采用原 dualspphysics 求解器中的速度 Verlet 格式和辛位置 Verlet 格式。速度 Verlet 格式是一种在时间上具有二阶精度的低计算成本格式。位置 Verlet 格式是一种辛积分器，它在保持二阶时间精度的同时分两个子步骤操作。这两种方案的详细信息可以在[32]中找到。

时间步进格式受 CFL 条件、最大力项和数值声速的约束。可变时间步长计算公式为：

$$\Delta t_f = \min_i \left( \sqrt{h / \| \mathbf{f}_i \|} \right) \quad (31a)$$

$$\Delta t_{cv} = \min_i \frac{h}{c_s + \max_j \left| \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + \eta^2} \right|} \quad (31b)$$

$$\Delta t = C_0 \min(\Delta t_{cv}, \Delta t_f) \quad (31c)$$

其中  $\Delta t_f$  为受力支配的时间步长， $\Delta t_{cv}$  为受 CFL 条件约束的时间步长， $\mathbf{f}$  为单位质量的力(即动量方程中计算的加速度)， $C_0$  为科朗数，默认设置为 0.2。

### 3. 地质材料与多体系统相互作用的建模

#### 3.1. 刚体动力学

由岩土材料运动驱动的刚体运动是基于刚体动力学基本方程求解的。在目前的框架中，刚体被离散为粒子，并使用第 2.6 节中描述的方法作为固体边界处理。代表刚体的每个粒子  $k$  的力根据周围所有材料粒子  $j$  的贡献之和计算。材料粒子施加在刚体粒子  $\mathbf{f}_k$  上的每单位质量的力计算为[57]，

$$\mathbf{f}_k = \sum_{j \in \text{geomaterials}} \mathbf{f}_{kj} \quad (32a)$$

，其当前实施中的 SPH 公式为：

$$\mathbf{f}_k = \frac{1}{\rho_k} \sum_{j \in \text{geomaterials}} \frac{m_j}{\rho_j} (\boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_j) \cdot \nabla_k W_{kj} \quad (32b)$$

通过求解离散牛顿方程计算刚体运动，如下所示：

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum_{k \in \text{body}} m_k \mathbf{f}_k \quad (33a)$$

$$\mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \sum_{k \in \text{body}} m_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{f}_k \quad (33b)$$

式中， $M$  为物体质量， $\mathbf{I}$  为转动惯量矩阵， $\mathbf{V}$  为线速度， $\boldsymbol{\Omega}$  为角速度， $\mathbf{r}_k$  为质点位置



表 2  
岩土-多体相互作用算法。

Algorithm2 Interaction between geomaterial and multibody system	
1	//-Interaction_Forces
2	for each particle $k$ do
3	Compute the forces exerted on particles representing rigid bodies using Eq. (32)
4	end for
5	//-RunFloating
6	for each rigid body $N$ do
7	Compute the motion of rigid body $d\mathbf{V}/dt$ , $d\mathbf{\Omega}/dt$ using Eqs. (33a) and (33b)
8	end for
9	//-DSPHChronoLib
11	Compute $\mathbf{F}$ , $\mathbf{T}$ of rigid bodies according to $d\mathbf{V}/dt$ , $d\mathbf{\Omega}/dt$
12	Transfer $\mathbf{F}$ , $\mathbf{T}$ , and $\Delta t_{\text{SPH}}$ to Project Chrono
13	//-Project Chrono
14	Detect collisions and apply mechanical constraints for $\mathbf{f}_c$
15	Compute the $\mathbf{V}$ , $\mathbf{\Omega}$ , and $\mathbf{R}_0$ of the rigid bodies according to Eqs. (35a) to (35c)
16	Transfer the $\mathbf{V}$ , $\mathbf{\Omega}$ , and $\mathbf{R}_0$ of the rigid bodies back to SPH solver
17	//-FtUpdate
18	for each rigid body $N$ do
19	Update positions of the rigid bodies using Eq. (34)
20	end for

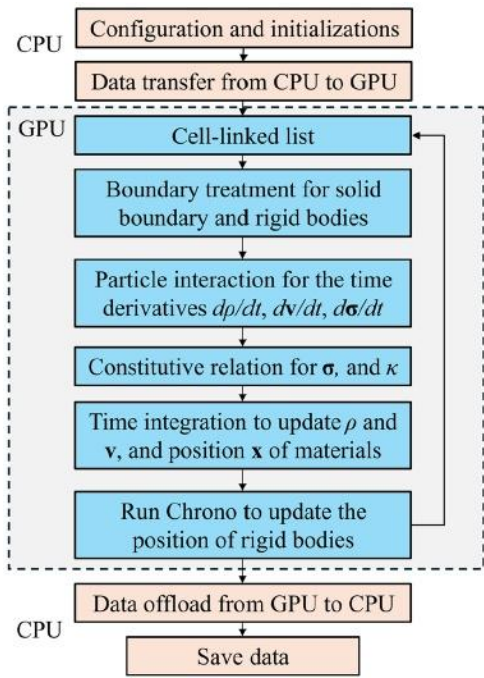


图 3。geodualspphysics 的计算工作流程和 GPU 并行框架。

$k$ ,  $\mathbf{R}_0$  为质心。  
计算得到的线性加速度( $d\mathbf{V}/dt$ )和角加速度( $d\mathbf{\Omega}/dt$ )随后传递给 Project Chrono, 在考虑机械约束的情况下计算全局框架中的  $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{\Omega}$  和  $\mathbf{R}_0$ 。最后, 代表刚体的粒子的速度计算公式为:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{r}_k - \mathbf{R}_0)$$
 (34)

3.2. 多体动力学

采用离散元法(DEM)的 Project Chrono[58]多体动力学库求解刚体之间的相互作用。多体系统的动力学由, 8 求

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{L}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$
 (35a)

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{v})$$
 (35b)

$$\mathbf{f}_i(t, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}_e - \mathbf{f}_c$$
 (35c)

其中  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{v}$  分别是多体系统的位置和速度, 它们通过线性变换矩阵  $\mathbf{L}(\mathbf{q})$  联系起来。  $d\mathbf{q}/dt$  包括位置参数和欧拉参数的时间导数, 描述刚体在全局坐标系中的运动。  $\mathbf{V}$  包含刚体固定坐标系中的线速度和角速度。详细的公式可以在[59,60]中找到。  $\mathbf{Ft}$  是由外力  $\mathbf{f}_e$  和约束力  $\mathbf{f}_c$  组成的总力之和。  $\mathbf{M}$  为多体系统的质量矩阵。

在 SPH 求解器中, 外力  $\mathbf{f}_e$  被认为是来自岩土材料的力, 而约束力  $\mathbf{f}_c$  是由于机械约束而在多体系统中产生的力, 在 DEM 求解器 Project Chrono 中求解。在这项工作中, Project Chrono 测试和采用的主要功能是具有摩擦约束的碰撞模块, 用于多个刚体之间的相互作用。然而, 其他机械约束, 如球面关节、铰链或弹簧, 也可以在代码中使用, 并可应用于车辆-地形交互等边界案例场景。

Project Chrono 中有两种摩擦接触模型, 包括光滑接触(SMC)和非光滑接触(NSC)[58]。在 SMC 中, 允许物体之间的重叠, 并使用基于惩罚的方法根据接触物体的部分变形来求解摩擦力。在 NSC 中, 引入互补条件对接触体施加非穿透约束, 并采用库仑摩擦模型求解摩擦力。

3.3. 与 Project Chrono 的耦合

地质力学 SPH 求解器与多体动力学 DEM 求解器之间的双向耦合是通过 Martínez-Est’vez 等人开发的通信接口 DSPHChronoLib 实现的。耦合过程如表 2 所示, 下面简要介绍。有关实现的更多细节, 读者可参考 Martínez-Est’vez et al.[35]。

在每个时间步长中, 耦合分三部分完成:(1)SPH 求解器根据 Eq.(32)计算岩土材料对刚体施加的力。然后, 由 eq 得到刚体的线性加速度 ( $d\mathbf{V}/dt$ ) 和角加速度 ( $d\mathbf{\Omega}/dt$ )。 (33a) 和 (33b), 并将其传递给 DSPHChronoLib, 计算线性力  $\mathbf{F}$  和扭转力  $\mathbf{T}$ ;(2) DEM 求解器从 DSPHChronoLib 接收  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{T}$ , 并将它们作为外力( $\mathbf{f}_e$ )与内部计算的约束力( $\mathbf{f}_c$ )一起应用, 求解刚体动力学。Project Chrono 然后输出线速度  $\mathbf{V}$ 、角速度  $\mathbf{\Omega}$  和质心位置  $\mathbf{R}_0$  到 geodualspphysics;(3)接收到  $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{\Omega}$  和  $\mathbf{R}_0$  后, 通过求解 Eq.(34)更新代表刚体的粒子的速度。然后在 geodualspphysics 中更新整个系统, 以便进行下一个时间步长计算。

4. 代码文档

4.1. 实现概述

上述算法和数值方案的实现基于 dualspphysics v5.2, 利用其内置的基于 openmp 和 cuda 的并行计算架构, 并建立了 SPH 计算 workflow。这些框架已被用于解决 geodualspphysics 中的地质力学问题。图 3 给出了计算工作流程和 GPU 并行

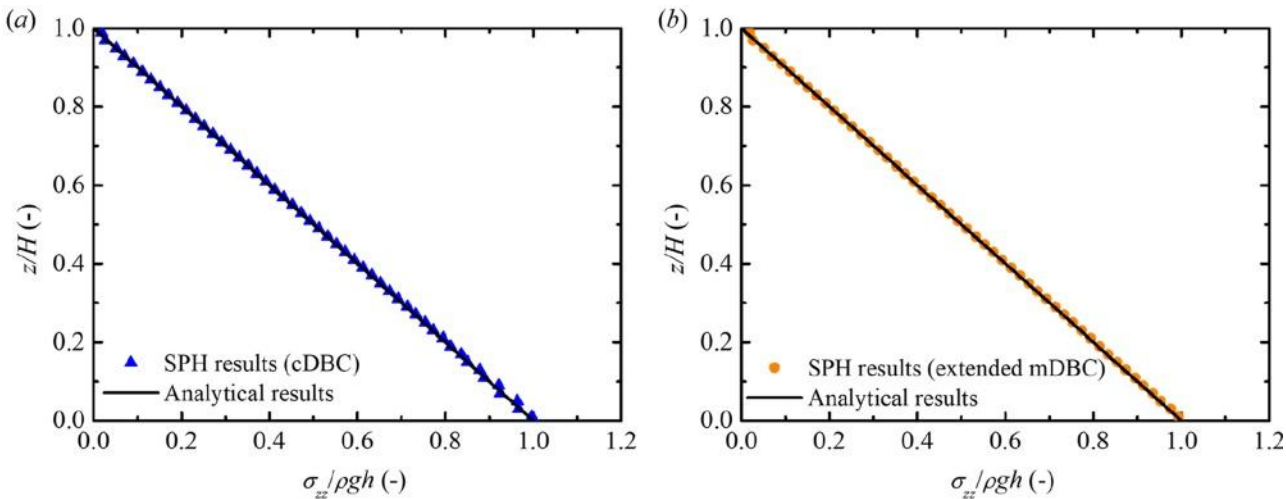


图 4. 使用(a) cDBC 和(b)扩展 mDBC 获得最佳分辨率的最后瞬间(t = 20 s)归一化垂直应力剖面。

框架。

主要增加的变量包括应力张量  $\sigma$ 、应力速率张量  $d\sigma/dt$  和等效偏塑性应变  $\kappa$ 。这就需要修改 CPU 和 GPU 上新变量的内存分配，CPU 和 GPU 之间新分配的数组的数据传输，以及新变量的单元链表。此外，配置和初始化也被修改，以从 XML 文件加载材料属性和执行参数。

(1)通过函数 `JSphCpu::Interaction_CdbcCorrection` 进行边界处理，涉及固体边界和刚体上应力和速度条件下的边界-材料相互作用和刚体-材料相互作用，如第 2.6 节所述。`JSphCpu::Interaction_MdbcCorrection`、`KerInteractionCdbcCorrection` 和 `KerInteractionMdbcCorrection`，(2)粒子相互作用，包括材料-材料相互作用，材料-边界相互作用，材料-刚体相互作用，用于方程表示的控制方程的评估。(13a)至(13d)，以及 Eq.(32)中材料对刚体施加的力的刚体-材料相互作用，Eq.(21)中的移动距离，以及 Eq.(17)中的扩散项，这些都在函数 `JSphCpu::InteractionForcesFluid` 和 `KerInteractionForcesFluid` 中。(3)使用表 1 中列出的半隐式应力更新算法更新应力和塑性应变的时间积分，在函数 `JSphCpu::ComputeVerlet`、`JSphCpu::ComputeSymplecticPre`、`JSphCpu::ComputeSymplecticCorr`、`KerComputeStepVerlet`、`KerComputeStepSymplecticPre` 和 `KerComputeStepSymplecticCor` 中实现。

在 `geodualspphysics` 中，CUDA 配置参数与 `dualspphysics` 保持相同。块大小(每个块的线程数)有三种计算模式，可以使用执行参数 `-blocksize:<mode>` 进行更改。默认情况下(`-blocksize:0`)，块大小固定为 128 个线程。其他选项包括(`-blocksize:1`)其中最优块大小由 CUDA 占用计算器确定，(`-blocksize:2`)其中最优块大小是根据 CUDA 内核中使用的数据经验计算的。块的数量由粒子数除以每个块的线程数来确定，使用公式  $(\text{particlenumber} + \text{blockSize} - 1) / \text{blockSize}$  来确保每个粒子都分配给一个线程。共享内存存在 CUDA 内核中有选择地使用，主要用于在邻居搜索和约简操作期间缓存粒子信息。对于大多数粒子数据，由于数据集的规模较大，因此使用全局内存。线程之间的同步使用 `_syncthreads()` 函数进行管理。此操作仅在线程之间需要协调以确保最大效率时应用，例如，在计算数据数组中的最大值时，创建新的周期粒子列表时，或为邻居 9 生成单元链表

搜索。

`geodualspphysics` 采用了从原始 `dualspphysics` 代码继承的混合精度策略。双精度用于精度需要高精度的地方，例如存储和计算粒子位置，而其余部分采用单精度。这种策略对 `gpu` 来说是一种性能优化，因为它们的架构被设计成处理单精度操作的速度明显快于双精度操作。先前对 `dualspphysics` 代码的研究表明，这种优化提供了显著的性能改进，而不会损失 GPU 模型的准确性[61]。

除了实现之外，还进行了代码优化，以实现高效的指令执行，减少内存使用和高 GPU 占用。具有多个组件的变量在 GPU 执行期间被转换为内置向量类型，例如，在 GPU 上使用 `float2` 数组进行应力张量计算。采用 CUDA 内置函数进行数学运算，提高计算效率。原始 `dualspphysics` 代码中的内存管理遵循静态分配方法:在需要时分配数组，并在使用后立即释放。利用这一特性，应力张量的内存分配减少了，因为应力率张量的数组在时间积分后被释放，将分配的内存留给邻居列表计算中所需的额外应力张量数组。此外，采用 NVIDIA Nsight Compute 进行 GPU 分析，以优化性能指标，如每个线程的寄存器使用率，通过减少局部变量和中间值等策略提高占用率。例如，在辛位置 Verlet 方案中，密度更新以其标准形式使用，而不是原始 `dualspphysics` 解算器中的修改版本，其中包括额外的局部变量(即 `epsilon_rdot`)以提高密度/压力稳定性。这一变化并不影响结果，因为在当前的应用中，密度与应力计算没有直接联系，不容易出现不稳定。

4.2. 编译并运行代码

本文附带的源代码和文件包括预编译的 `geodualspphysics` 可执行文件以及 `DSPHChrono-Lib` 和 `Project Chrono` 的动态库。这允许用户立即在 CPU/GPU 上运行发布版本，而无需编译源代码。在需要编译的情况下，linux 系统需要使用 GNU C++编译器，Windows 系统可以使用 Visual Studio IDE，使用原始 `dualspphysics` 包中提供的 Visual Studio 2022 解决方案或 CMAKE。需要包含 NVCC 编译器的 CUDA 工具包进行编译

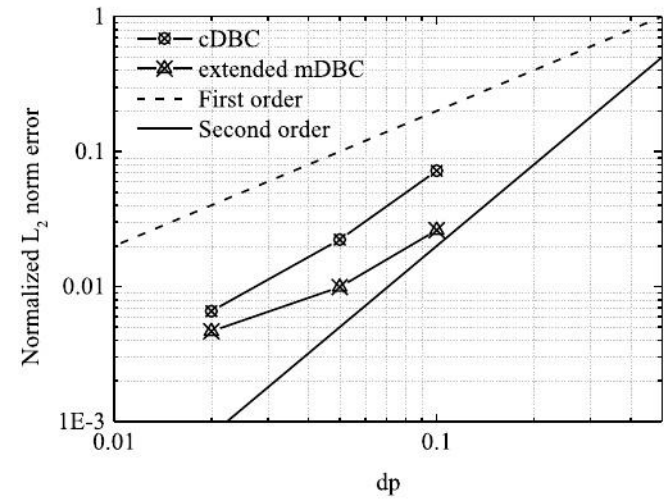


图 5. 归一化后的  $L_2$  垂直应力在  $t = 20s$  时的误差规范。

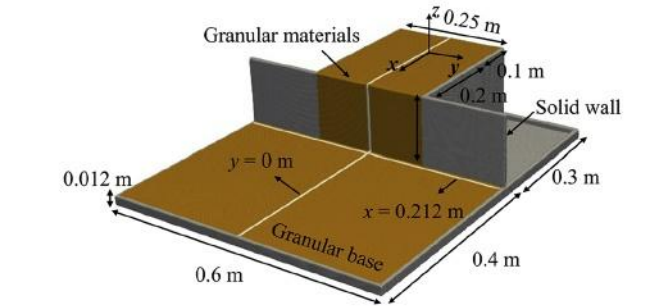


图 6. 变形地基上的颗粒破坏:初始数值形态。

并在 NVIDIA GPU 卡上运行 geodualspphysics。要使用 Project Chrono 编译 geodualspphysics，请使用 `libChronoEngine.exe` 文件。So 和 `libdsphchrono`。So 都包含在 `src/lib/` 中。

Linux gcc 和 bin/linux。应该使用 GNU C++ 编译器版本 11 或更高版本来编译代码。有关 Project Chrono 编译的详细信息，读者可以参考 Martínez-Estévez et al.[35]。

一旦构建了可执行文件，启动模拟所需的文件包括 `Case_Def.xml` (可扩展标记语言) 文件和 `.sh` (Shell) 或 `.bat` (批处理) 脚本。与流体力学 `dualspphysics` 包相同，用户可以修改 `Case_Def`。XML 可以调整几何图形、材料属性或执行设置。例如，可以将“Boundary”选项更改为 cDBC 的 `value = “1”`，而 mDBC 的 `value = “2”`。脚本 `.sh/.bat` 指定了可执行文件的位置，并包含了这些可执行文件的命令标志。

`Case_Def.xml` 文件由 `dualspphysics` 开发的预编译预处理工具 `GenCase` 处理，生成粒子离散化并准备模拟输入文件。外部几何形状 (如复杂地形) 也可以集成到数值模型中。有关使用 XML 生成几何图形或将外部几何图形加载到模拟中的指导，可以参考 `dualspphysics` 包中的 `XML_GUIDE` 文档获取详细说明。手稿中提出的基准测试在 `geodualspphysics/examples` 文件夹中提供。对于每个基准测试，都可以使用脚本在 Linux 或 Windows 上执行代码。

在启动模拟时，脚本将调用 `GenCase` 来生成初始数值配置，然后调用 `geodualspphysics` 来运行模拟。`geodualspphysics` 输出的二进制文件最终将由后处理工具 (如 `PartVtk`) 处理。输出文件包括 VTK (Visualization)

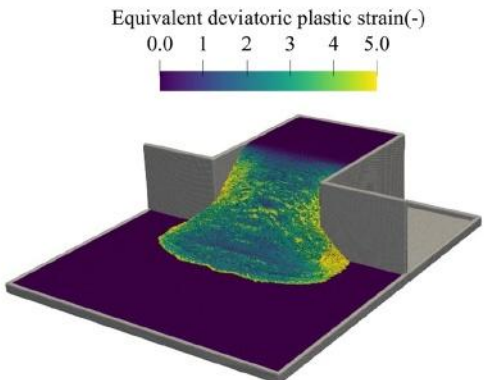


图 7. 模拟得到的最终矿床剖面图。

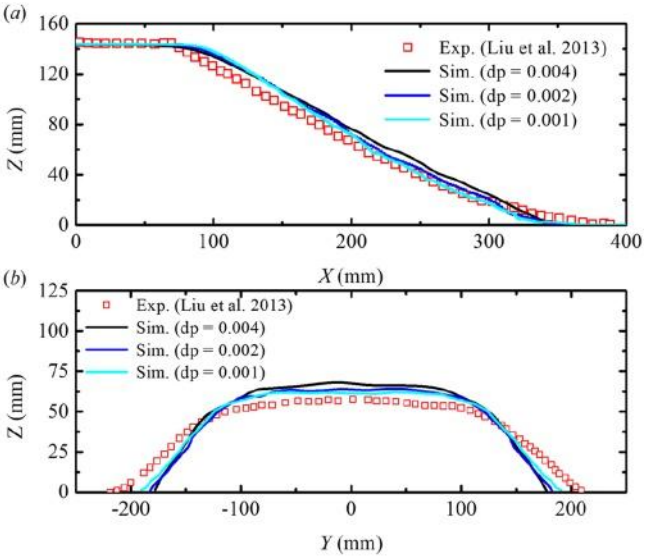


图 8. 在(a)  $y = 0\text{ m}$  和(b)  $x = 0.212\text{ m}$  截面处与实验测量的自由表面剖面的比较。

Toolkit)，可以方便地加载到 Paraview 等可视化软件中进行结果分析。

### 5. 验证用例

`geodualspphysics` 在模拟岩土材料大变形及其与多刚体相互作用方面的有效性在本节中通过六个基准示例进行评估，并与可用的解析解、数值解和实验数据进行比较。

#### 5.1. 静土柱

模拟静土柱作为基本基准试验，研究了所实施的 SPH 方案的收敛性和边界处理的性能。数值配置与 Feng et al.[31] 先前的工作相同。土柱高度设为 1 m，横向边界采用周期性边界处理，底部采用实心边界处理。采用人工粘度系数  $\alpha = 1.0$  的增加值来稳定系统中由于突然施加重力而产生的振荡[62]。杨氏模量  $E = 10\text{ MPa}$ ，泊松比  $\nu = 0.3$ ，摩擦角  $\phi = 33^\circ$ ，黏聚力  $c = 10\text{ kPa}$ ，膨胀角  $\psi = 0^\circ$ ，密度  $\rho = 2100$



表 3

$y = 0$  m 和  $x = 0.212$  m 截面上不同粒子间距的统计参数  $A_r$  和  $P_d$ 。

	$dp = 0.004$ m	$dp = 0.002$ m	$dp = 0.001$ m
$P_d(x = 0.212\text{ m})$	0.198	0.181	0.143
$A_r(x = 0.212\text{ m})$	1.118	1.063	1.055
$P_d(y = 0\text{ m})$	0.084	0.071	0.066
$A_r(y = 0\text{ m})$	1.049	1.044	1.041

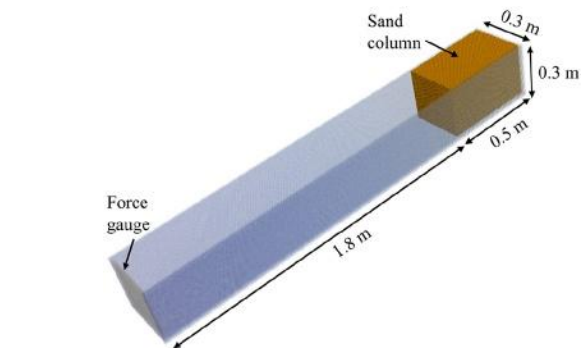


图 9。砂对刚性壁面的冲击力:初始数值形态。

$\text{kg/m}^3$  取初始粒子间距  $dp = 0.1$ 、 $0.05$ 、 $0.02$  m。模拟时间为 20 秒的物理时间。

图 4 显示了  $dp = 0.02$  m 的模拟在最后时刻的归一化垂直应力，与解析解进行了比较。总体而言，两种边界选项都与分析结果吻合得很好。cDBC 在边界附近表现出轻微的波动，而扩展的 mDBC 产生了更平滑的预测，与解析解更接近。

此外，图 5 给出了三种不同初始粒子间距在  $t = 20$  s 时垂直应力的归一化  $L2$  误差规范。所实现的 SPH 方案对 cDBC 和扩展 mDBC 都具有收敛性。扩展的 mDBC 总体上比 cDBC 具有更高的精度，特别是在粗颗粒分辨率下。然而，对于这种情况，两种边界方法之间的精度差距随着粒子分辨率的细化而缩小。

### 5.2. 可变形基底上的颗粒破坏

本案例模拟了粒状材料从受限的盒子坍塌到可变形的基座上，以验证求解器在模拟大变形粒状流动方面的能力。Liu 等人已经对该测试进行了实验研究[63]，并在  $x = 0.212$  m 和  $y = 0$  m 处测量了最终沉积物剖面。初始数值配置被设置为与实验设置保持一致，如图 6 所示。模拟采用的材料性能参考 Huang et al.[27]，取  $E = 2$  MPa， $\nu = 0.3$ ， $\phi = 33^\circ$ ， $c = 0$  kPa， $\psi = 0^\circ$ ，密度  $\rho = 1530$   $\text{kg/m}^3$ 。为了评估求解器的收敛行为，采用了三组初始粒子间距，即  $dp = 0.001$ 、 $0.002$  和  $0.004$  m，得到的总粒子数分别为 35 万、229 万和 1645 万。

图 7 显示了使用最精细的颗粒分辨率( $dp = 0.001$  m)模拟得到的最终沉积剖面，用偏塑性应变着色。结果表明，模拟捕获了密闭容器中颗粒破坏的机制，其中大变形区和静止区被清楚地区分开来。

利用后处理工具等值面从仿真输出中提取自由曲面轮廓的位置。然而，由于

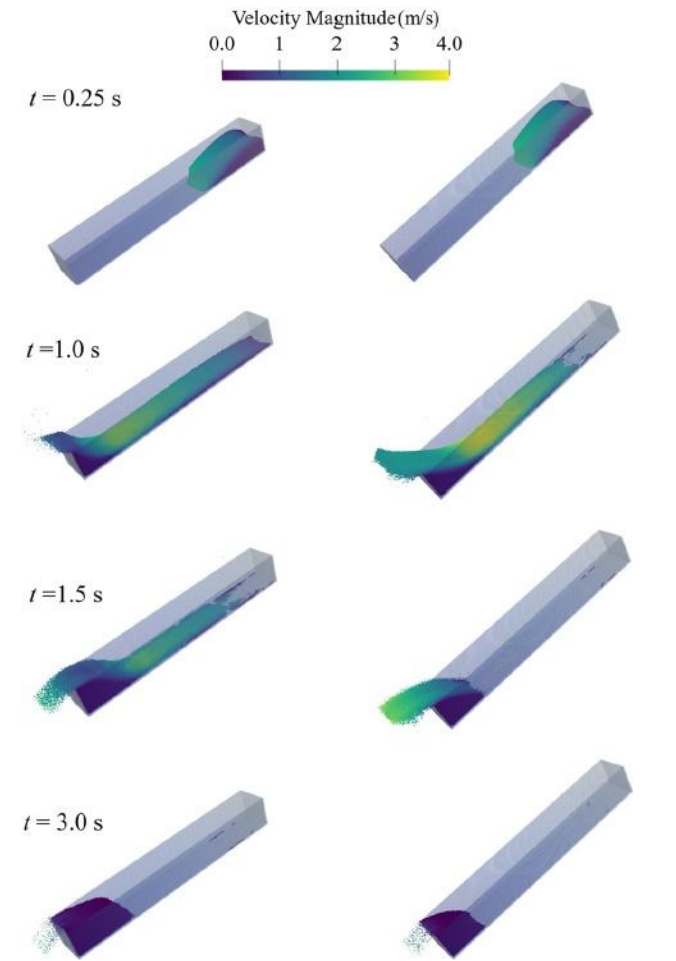


图 10。砂粒在 45 inclined 平面(左列)和 55 inclined 平面(右列)上的冲击过程。

等值面对于捕获非平面表面的效果较差， $x = 0.212$  m 处的轮廓是通过直接识别自由表面粒子(例如，基于计算的粒子散度)来生成的。

图 8 将沿  $x = 0.212$  m 和  $y = 0$  m 两个横截面模拟的最终沉积剖面与实验结果进行了对比。实验结果

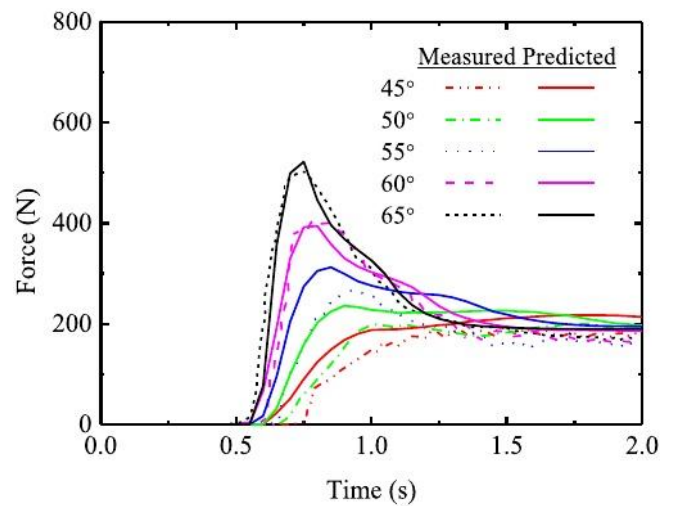


图 11。在模拟中预测的冲击力的时间历史，并与实验测量结果进行比较。



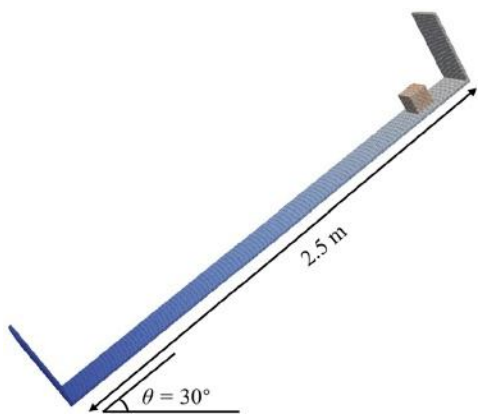


图 12。立方体在斜坡上的滑动运动:初始数值构型。

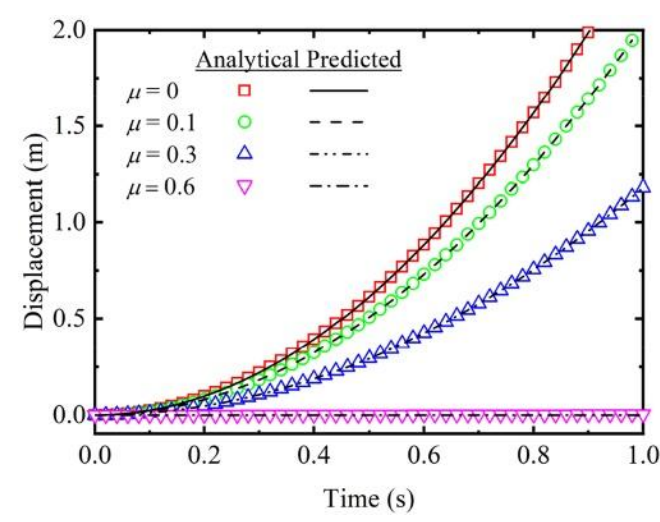


图 13。不同摩擦系数下滑动立方体随时间的位移。

数值和实验结果之间的差异使用定义为[64]的统计参数进行量化,

$$A_r = \left( \sum_j (f_j^{\text{num}})^2 / \sum_j (f_j^{\text{exp}})^2 \right)^{1/2} \tag{36a}$$

$$P_d = \left( \sum_j (f_j^{\text{num}} - f_j^{\text{exp}})^2 / \sum_j (f_j^{\text{exp}})^2 \right)^{1/2} \tag{36b}$$

其中  $A_r$  表示两个数据集之间的相对振幅, 其中完全一致产生  $A_r \rightarrow 1$ 。  $P_d$  表示两个数据集之间的相位差, 完全一致,  $P_d \rightarrow 0$ 。  $F$  表示感兴趣的变量(在本例中为自由表面粒子的位置), 其中下标表示实验(exp)或数值(num)值。

表 3 列出了  $x = 0.212 \text{ m}$  和  $y = 0 \text{ m}$  截面上不同粒子间距下得到的  $A_r$  和  $P_d$  值。这两个统计参数都意味着数值结果和实验测量值之间有合理的一致性。  $x = 0.212 \text{ m}$  处的  $P_d$  值相对较大, 但随着粒子间距的减小, 结果越来越准确, 表明预测的自由表面剖面与实验结果趋同。与实验数据的差异可能是由于与实验相比, 在  $x = 0.1 \sim 0.2 \text{ m}$  范围内的数值模拟中颗粒状物质积累更大, 如图 8(a)所示, 导致物质流动更少

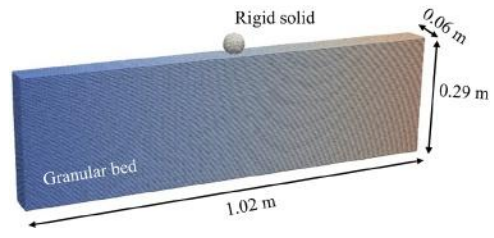


图 14。球形固体撞击颗粒床:初始数值构型。

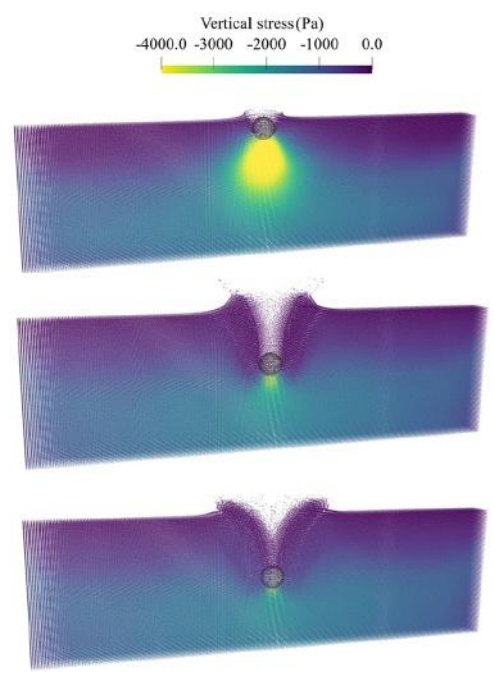


图 15。不同时间瞬间(从上到下)初始速度为 3.03 m/s 的仿真结果:(a)  $t = 0.015\text{s}$ , (b)  $t = 0.08\text{s}$ , (c)  $t = 0.15\text{s}$ 。

下坡。这种观察结果的潜在原因可能各不相同, 包括土壤非均质性、壁面摩擦和数值方案的准确性。未来的工作可能会集中在这些方面来改进预测。

5.3. 沙子对刚性墙体的冲击力

Moriguchi 等人[65]的实验模拟验证了土流对刚性壁面的冲击力。数值模型的配置如图 9 所示。沙柱最初被限制在水槽顶部, 释放后冲击底部刚性壁。在实验中使用力传感器测量冲击力。

强度参数取  $E = 21.6 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\phi = 35^\circ$ ,  $c = 0 \text{ kPa}$ ,  $\psi = 0^\circ$ , 遵循 Lei 等人[66]。根据他们的研究, 采用中间限定 Mohr-Coulomb 屈服面的 Drucker-Prager 屈服面常数。从体积上对密度进行反分析, 使砂柱的总质量与实验测量值 50kg 相匹配, 得到  $\rho = 1111 \text{ kg/m}^3$ 。数值模型离散化, 初始颗粒间距  $dp = 0.005 \text{ m}$ , 得到总颗粒数为 0.63 万个。模拟的物理时间为 3 s。实验中测试的所有五个倾角, 即  $45^\circ$ 、 $50^\circ$ 、 $55^\circ$ 、 $60^\circ$  和  $65^\circ$ , 在本工作中都进行了模拟。

图 10 显示了  $45^\circ$  和  $55^\circ$  的倾角在不同时刻根据速度大小着色的粒子。倾角越大的模拟效果越好

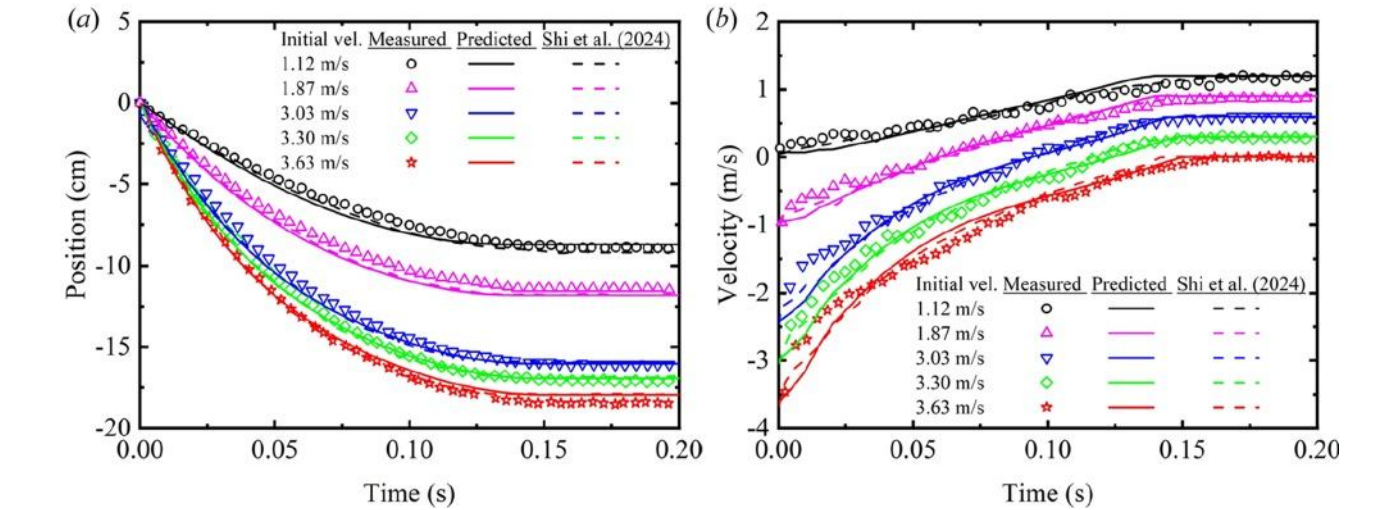


图 16。(a)球形固体的位置和(b)速度的时间演化(为了更清晰，每条曲线的 y 坐标都被顺序移动了 0.3)。

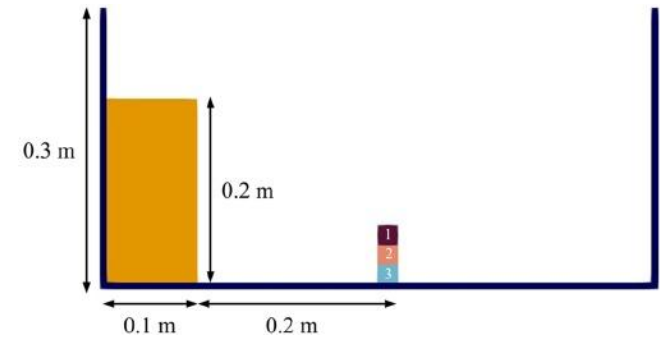


图 17。颗粒流对块体的动态影响:初始数值配置。

砂流的流动性。在撞击刚性壁面时，底部的沙子开始堆积，形成一个不断增长的沙堆。随着倾斜角的增大，最终沉积物的大小逐渐减小。模拟结果基本反映了 Moriguchi 等[65]报道的实验观测结果。

施加在刚性壁上的每单位质量的力通过使用 Eq. (32b)对代表壁面的粒子的力求和来评估。为了实现这一目的，修改了原始求解器中的测力选项。需要注意的是，仿真得到的力是总力，而实验中测得的冲击力是垂直于刚性壁面的力。因此，在计算冲击力时，采用了与 Chen et al.[7]类似的方法，将刚壁的法向量  $\boldsymbol{n}$  应用到冲击力中。图 11 显示了模拟中预测的随时间变化的冲击力，并与实验测量结果进行了比较。新求解器的预测结果与 Moriguchi 等人[65]的实验测量结果有较好的一致性。

#### 5.4. 一个立方体在斜坡上的滑动运动

在这种情况下，模拟立方体在斜坡上的滑动，以验证开发的求解器在使用 Project Chrono 求解具有摩擦约束的刚体-刚体相互作用时的有效性。图 12 显示了数值模型的配置。一个实心立方体被放置在一个斜面上，在重力和摩擦力的共同作用下沿着斜坡向下滑动。立方体的尺寸为  $0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m}$ ，斜坡的长度为  $2.5\text{ m}$ ，倾角为  $\theta = 30^\circ$ 。数值模型离散化，初始粒子间距  $\text{dp} = 0.005$ 。立方体和斜率的材料性质均设为杨氏

表 4  
颗粒流冲击块体模拟中采用的材料特性。

Granular column	
Density (kg/m <sup>3</sup> )	1300
Young's modulus (MPa)	0.5
Poisson ratio (-)	0.3
Cohesion (Pa)	0
Friction angle (°)	22
Dilation angle (°)	0
Wooden blocks	
Density (kg/m <sup>3</sup> )	500
Young's modulus (MPa)	50
Poisson ratio (-)	0.5
Fictional coefficient (-)	0.6

模量  $E = 2\text{ GPa}$ ，泊松比  $\nu = 0.2$ ，密度  $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$ 。坡度的摩擦系数设置为  $\mu = 0, 0.1, 0.3, 0.6$ 。

滑动立方体位移的时变解析解为  $g(\sin \theta - \mu \cos \theta) t^2/2$ 。图 13 给出了不同  $\mu$  值下块体位移的解析解与数值结果的比较。可以看出，模拟很好地捕捉到了刚体-刚体相互作用的摩擦接触。

#### 5.5. 球形固体撞击颗粒床

在这种情况下，执行球形固体撞击颗粒床的模拟，以测试 geodynamics 在模拟单一刚性固体与地质材料相互作用方面的有效性。数值模拟采用 Pica Ciamarra et al.[67]中描述的实验设置。图 14 展示了数值模型的几何结构。一个半径为  $0.0223\text{ m}$  的球形固体被放置在颗粒床的正上方，并以不同的初始速度释放。初始颗粒间距设为  $\text{dp} = 0.004\text{ m}$ ，得到的颗粒总数为 0.44 万个。

模拟中使用的材料性能取自 Shi 等人的[2]，取值为  $\rho = 600\text{ kg/m}^3$ ， $E = 1.3\text{ MPa}$ ， $\nu = 0.2$ ， $\phi = 16^\circ$ ， $c = 0\text{ kPa}$ ，颗粒床  $\psi = 0$  for 刚性固体  $\rho = 7850\text{ kg/m}^3$ 。值得注意的是，与 Shi 等人[2]相似，本研究通过将数值结果与初始速度为  $3.30\text{ m/s}$  的情况下的相应实验测量结果相匹配来校准颗粒层的杨氏模量。

图 15 为不同时间瞬间  $3.3\text{ m/s}$  初速度下的数值结果。值得注意的是，的预测应力剖面

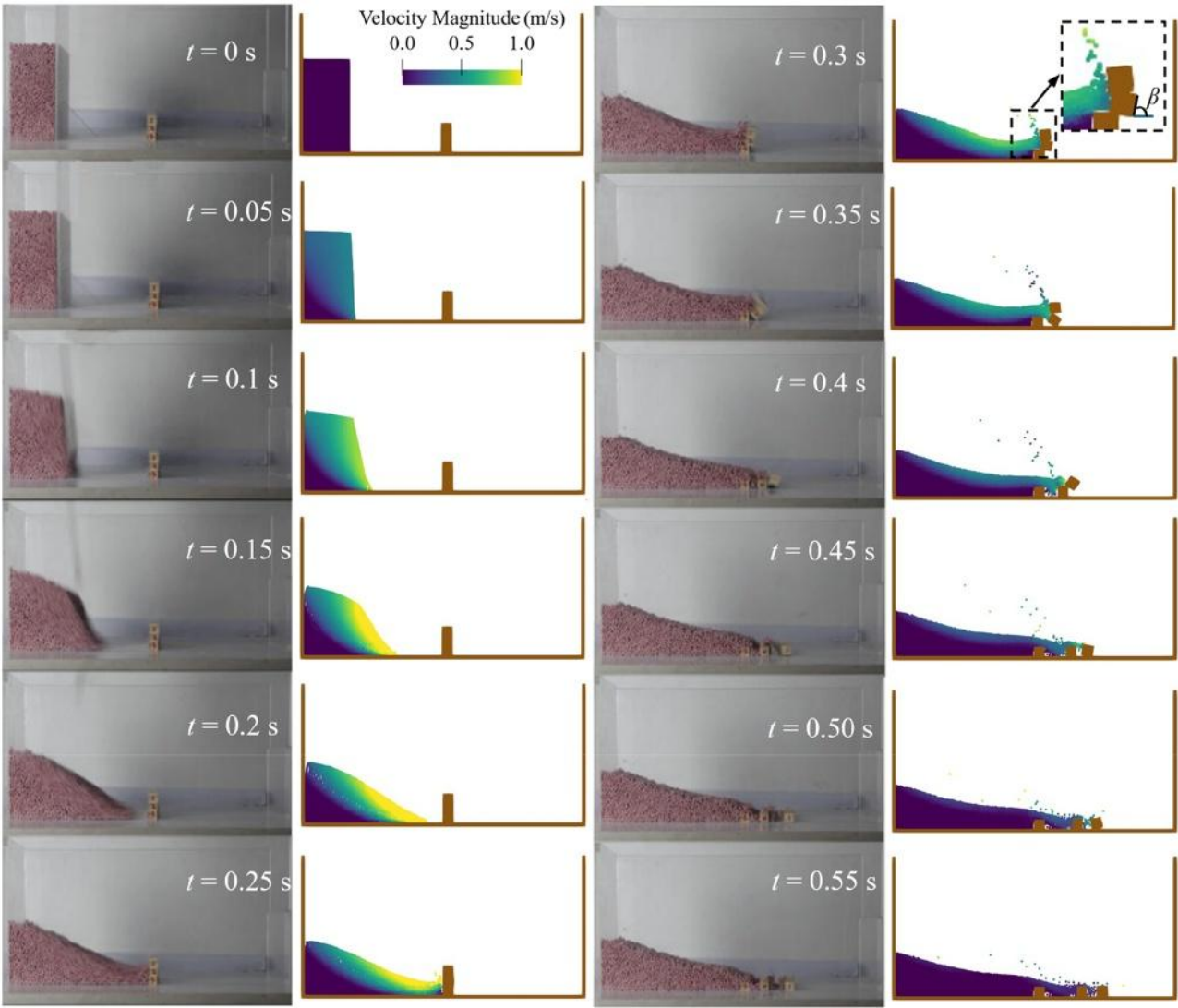


图 18. 实验观察[68]与模拟冲击过程对比。(改编自[68]，授权©John Wiley & Sons, Ltd.)。

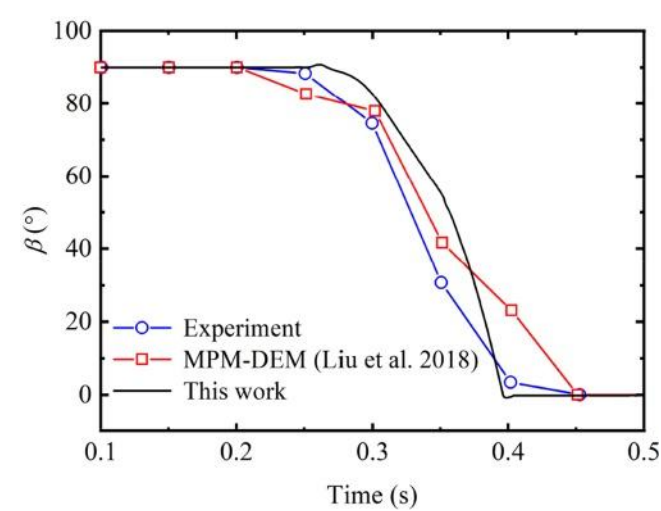


图 192 号块的旋转角度  $\beta$  的时间演化。

表 5 所采用装置信息。

GPU	NVIDIA GeForce RTX 4090	NVIDIA Tesla V100	CPU	Intel Xeon Gold 6248R
Compute capacity	8.9	7.0	Clock Speed	3.00 GHz
Global memory	24 GB	16 GB	Cores	24
CUDA cores	16384	5120	Threads	48
Clock rate	2.52 GHz	1.53 GHz	Cache	35.75 MB
Memory bandwidth	1008 GB/s	900 GB/s	RAM	256 GB
TFLOPS (Single precision)	82.6	15.7	Memory bandwidth	140.8 GB/s

即使在这种高速撞击场景下，颗粒状材料也保持平滑。此外，图 16 给出了 Pica Ciamarra 等人[67]报道的位置和速度数据以及 Shi 等人[2]的 MPM-DEM 模拟结果的对比。结果表明，该求解器的预测结果与实验测量和 MPM-DEM 结果吻合较好，表明该求解器可以有效地捕捉大变形下离散固体与颗粒连续体之间的相互作用。



表 6

性能分析的决议。

Particle spacing (m)	Material particles (million)	Boundary particles (million)	Total particles (million)
0.0008	24.7	3.7	28.4
0.001	2.36	12.64	15.00
0.00125	6.48	1.51	7.99
0.0015	3.79	1.00	4.79
0.002	1.59	0.59	2.18
0.0025	0.816	0.379	1.195
0.004	0.201	0.149	0.350
0.008	0.0267	0.0357	0.0624

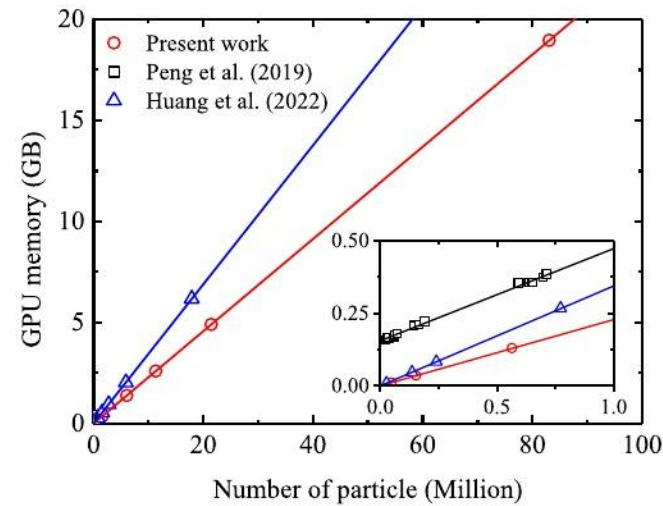


图 20. GPU 内存使用和粒子数量之间的关系。

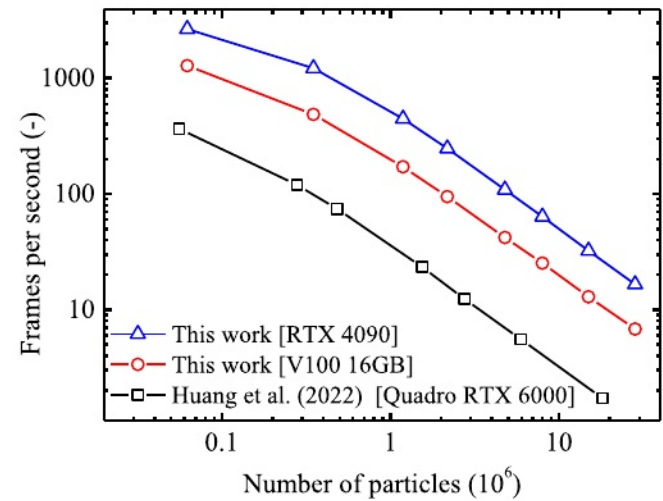


图 21. 计算速度(FPS)与粒子数的关系。

5.6. 颗粒流对块体的动态影响

本例引用了 Liu 等[68]对颗粒流对块体影响的模拟实验，验证了所开发的求解器在模拟岩土材料与多刚体相互作用时的有效性。这一基准示例已被广泛用于验证颗粒流与刚体多体系统之间的相互作用(例如[5,18,69])。采用二维设置来与文献中报道的数值配置和材料特性保持一致。

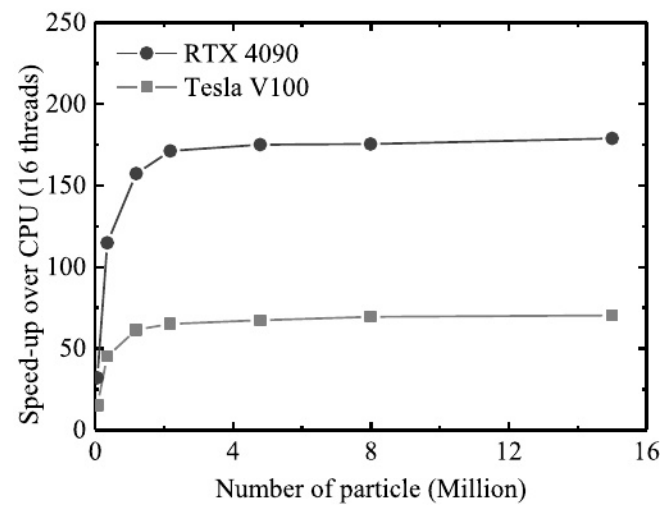


图 22. 在 CPU(16 个线程)上加速 3-D 颗粒列崩溃测试。

数值模型的设置如图 17 所示。颗粒柱的宽度为 0.1 m，高度为 0.2 m。块状尺寸为 0.02 m × 0.018 m。砌块编号。3 号固定在空间上，与实验设置保持一致；1 号和 no. 2 号是可移动的。表 4 列出了模拟中采用的材料参数，这些参数取自 Liu 等[68]的实验数据。初始粒子间距设置为 0.0025 m。

图 18 为颗粒柱的流动过程及其对砌块的影响。为了进行比较，还包括了实验中的快照。可以看到，撞击发生在  $t = 0.25$  s，并引起两个块 no 的平移和旋转。1 号和 no 号。2. 座号。2 号积木接触地面，在  $t = 0.4$  s 左右停止旋转，而第 2 号积木。3 号在  $t = 0.45$  s 左右完全接触地面。实验中观察到的物理过程在模拟中得到了有效的再现。此外，颗粒流和多体系统之间没有出现非物理间隙或数值不稳定性，表明存在稳定一致的耦合。

此外，模拟测量了 2 号块左边界与 x 轴之间的旋转角度  $\beta$ ，并与图 19 中 Liu 等[68]的实验数据和 MPM-DEM 结果进行了对比。SPH 计算结果与实验数据和 MPM-DEM 计算结果基本吻合，表明该求解器能够较准确地捕捉颗粒流与多体系统的动态相互作用。

6. 性能分析

新求解器在 GPU 上的性能在本节中进行了测试和报告，重点关注内存使用，计算速度，多核 CPU 上的加速，以及关键 CUDA 内核的分析。本文选择文献中广泛用于性能测试的三维颗粒柱崩溃测试作为基准案例。采用 NVIDIA GeForce RTX 4090 进行 GPU 仿真，并在 NVIDIA Tesla V100 上进行仿真比较。多核 CPU 模拟采用 Intel 至强 Gold 6248R 处理器。所采用器件的详细情况如表 5 所示。

颗粒圆柱坍塌试验模拟重力驱动的圆柱形颗粒柱的自由落体。柱的初始尺寸设置为半径  $r_0 = 0.2$  m，高度  $h_0 = 0.1$  m，对应于初始宽高比  $\alpha = 0.5$ 。模拟所用材料参数与 Huang 等人[27]相同，取值  $\rho = 2600$  kg/m<sup>3</sup>， $E = 15$  MPa， $\nu = 0.3$ ， $\phi = 30^\circ$ ， $c = 0$  kPa。采用的初始颗粒间距  $dp = 0.008$  m ~  $dp = 0.0008$  m。模拟中采用的分辨率和得到的粒子数如表 6 所示。所有模拟均在  $t = 0.1$  s 的物理时间内进行。



表 7

geodualspphysics 中主要核的剖析数据。

Performance metrics	KerMDBC	KerCDBC	KerInteract	KerSymPre	KerSymCorr	KerVerlet
Duration (ms)	0.251	0.104	3.24	0.458	0.429	0.471
Compute Throughput (%)	34.33	31.58	78.79	54.06	63.77	56.89
Memory Throughput (%)	15.93	15.58	35.67	92.75	88.52	91.88
TFLOP/s (Single-precision)	4.14	3.47	9.7	0.31	0.34	0.31
L2 Hit Rate (%)	66.56	62.43	91.37	52.86	56.16	47.87
No Eligible (%)	67.81	58.97	20.7	96.88	96.58	96.74
Average Active Threads Per Warp (%)	18.21	19.23	19.07	32	32	32
Registers Per Thread	115	96	64	40	40	48
Theoretical Occupancy (%)	33.33	41.67	66.67	100	100	83.33
Achieved Occupancy (%)	25.84	30.86	63.1	86.17	85.49	71.41

表 8

dualspphysics 中主要内核的分析数据。

Performance metrics	KerMDBC	KerInteract	KerInteract(SPS)	KerSymPre	KerSymCorr	KerVerlet
Duration (ms)	0.23	2.37	3.37	0.236	0.416	0.276
Compute Throughput (%)	37.87	83.6	76.86	62.26	85.54	60.27
Memory Throughput (%)	8.34	33.97	34.48	92.88	66.46	92.62
TFLOP/s (Single-precision)	3.37	10.435	10.5	0.126	0.14	0.133
L2 Hit Rate (%)	60.23	87.08	88	51.32	40.67	44.5
No Eligible (%)	70.18	15.84	22.58	96.65	96.53	96.86
Average Active Threads Per Warp (%)	20.16	21.67	18.23	32	31.85	32
Registers Per Thread	96	48	64	33	29	39
Theoretical Occupancy (%)	41.67	83.33	66.67	100	100	100
Achieved Occupancy (%)	30.43	78.41	62.72	81.98	92.01	82.54

GPU 内存使用与总粒子数之间的关系如图 20 所示，并与 Peng 等人使用开源求解器 LOQUAT 的报告结果和 Huang 等人使用 dualspphysics (v.4.0)修改的内部求解器的结果进行了比较。从图 20 中可以看出，这三种求解器都显示出内存使用与粒子数之间的线性关系。在这项工作中开发的新求解器实现了比当前最先进的低得多的内存消耗。对于 100 万个粒子的模拟，LOQUAT 需要约 0.48 GB 的 GPU 内存，Huang 等人的求解器[27]需要约 0.35 GB 的 GPU 内存分配，而 geodualspphysics 只需要 0.23 GB。geodualspphysics 的内存使用量比 LOQUAT 少 52%，比 Huang 等人的求解器少 34%，这表明 geod

ualspphysics 在更大规模和更精细分辨率的应用中具有潜力。

geodualspphysics 的计算效率是使用每秒性能度量帧数(FPS)来测量的，定义为每秒执行的计算步骤数。图 21 比较了 geodualspphysics 在 NVIDIA GeForce RTX 4090 和 NVIDIA Tesla V100 上实现的 FPS，以及 Huang 等人[27]在 NVIDIA Quadro RTX 6000 上报告的 FPS 值。geodualspphysics 在 Tesla V100 上的 FPS 比 Huang 等人在 Quadro RTX 6000 上报道的 FPS 高出近一个数量级。虽然这个比较涉及在两种不同的 GPU 设备上的模拟，但值得注意的是，采用的 Tesla V100 具有与 Quadro RTX 6000 相当的 FP32 性能。进一步说，

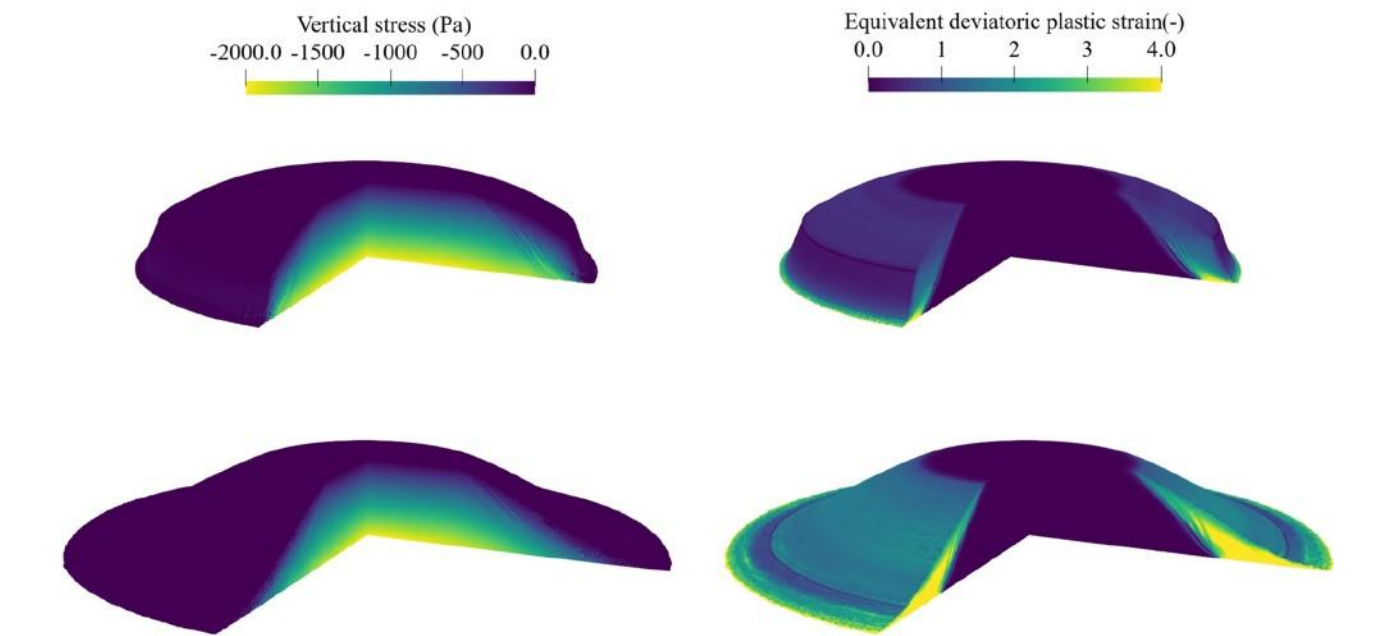


图 23。8670 万个颗粒的颗粒流模拟结果。



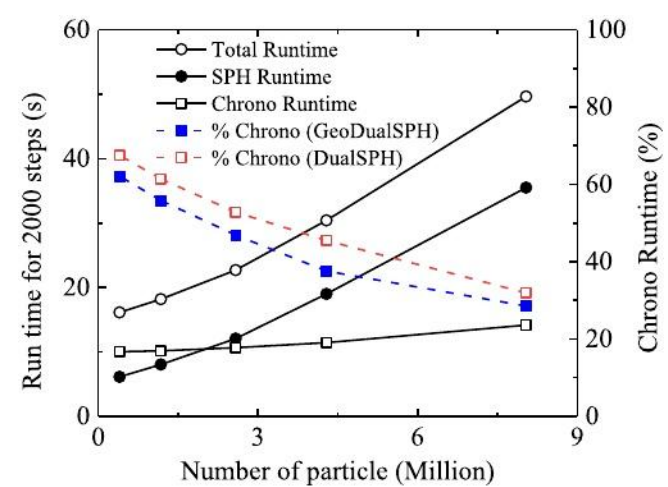


图 24geodualspphysics 和 Project Chrono 在不同粒子分辨率下的运行时间。

在 RTX 4090 上的 geodualspphysics 仿真比在 Tesla V100 上实现了大约 2.6 ×higher FPS，这表明随着 GPU 设备的进步，geodualspphysics 的性能可以很好地扩展。具体来说，对于 119 万粒子的模拟，geodualspphysics 在 Tesla V100 上的 FPS 速率为 171.1，在 GeForce RTX 4090 上的 FPS 速率为 445.9，而对于 1500 万粒子的模拟，在 Tesla V100 上的 FPS 速率为 12.9，在 RTX 4090 上的 FPS 速率为 32.3。这些结果比文献中报道的类似规模模拟的 FPS 有了实质性的增强。这些结果证明了 geodualspphysics 在计算速度和存储效率方面的进步。

另一个评估是评估 geodualspphysics 在多核 CPU 上的 GPU 加速。基于 openmp 的 CPU 实现遵循与 GPU 相同的计算工作流，使它们具有可比性。对于 CPU 上大粒子数的实际模拟时间，在粒子数范围为 0.06 至 1500 万的情况下，以满足 CFL 条件的最佳分辨率的固定时间步

长( $\Delta t = 3 \times 10^{-6}$ 秒)，模拟运行 2000 个计算步长。CPU 模拟使用分配了 16 个线程的英特尔至强黄金 6248R。

GPU 对 CPU(16 个线程)的加速，以 GPU 实现的 FPS 与 CPU 实现的 FPS 之比计算，如图 22 所示。结果表明，对于小于 200 万个粒子的模拟，加速随粒子数量的增加而迅速增加。超过此点后，加速增长率随着粒子数的进一步增加而减慢。对于 Tesla V100，最大加速达到 70 倍左右，以至强黄金 6248R(使用 16 个线程)为基准，而 RTX 4090 的最大加速达到 180 倍。这一发现突出了基于 gpu 的加速的优势。这也意味着 geodualspphysics 中的 GPU 加速可以比串行 CPU 计算高出三个数量级。

使用 GPU 分析工具 NVIDIA Nsight Compute 对 geodualspphysics 中关键 CUDA 内核的具体性能指标进行了研究。在 RTX 4090 上模拟了  $dp = 0.002\text{ m}$  的颗粒柱在第一时间步长的塌陷过程。分析了 CUDA 核的主要计算部分，包括粒子相互作用、时间积分和边界处理。表 7 和表 8 分别列出了 geodualspphysics 和 dualspphysics 中主要内核的 GPU 分析结果。

分析结果表明，geodualspphysics 中的 CUDA 内核 KerMDBC 和 kerinteraction 的占用率略低于 dualspphysics 中的对应内核。这种减少是因为 geodualspphysics 为应力张量计算引入了额外的数组，每个线程需要更多的寄存器来进行浮点操作。为了进行公平的比较，dualspphysics 求解器在流体模拟中使用亚粒子应力(SPS)选项进行了测试，这同样需要应力张量计算。geodualspphysics 中的 kerinteraction 与 dualspphysics 中的 kerinteraction (SPS)之间的比较显示了几乎相同的性能指标。虽然已经努力保留 CUDA 内核的性能指标进行时间集成(即 KerSymPre, KerSymCorr 和 KerVerlet)，但它们的执行时间仍然比原始 dualspphysics 中的更长。这是意料之中的，因为当前的实现包括了弹性应力集成和返回的额外计算

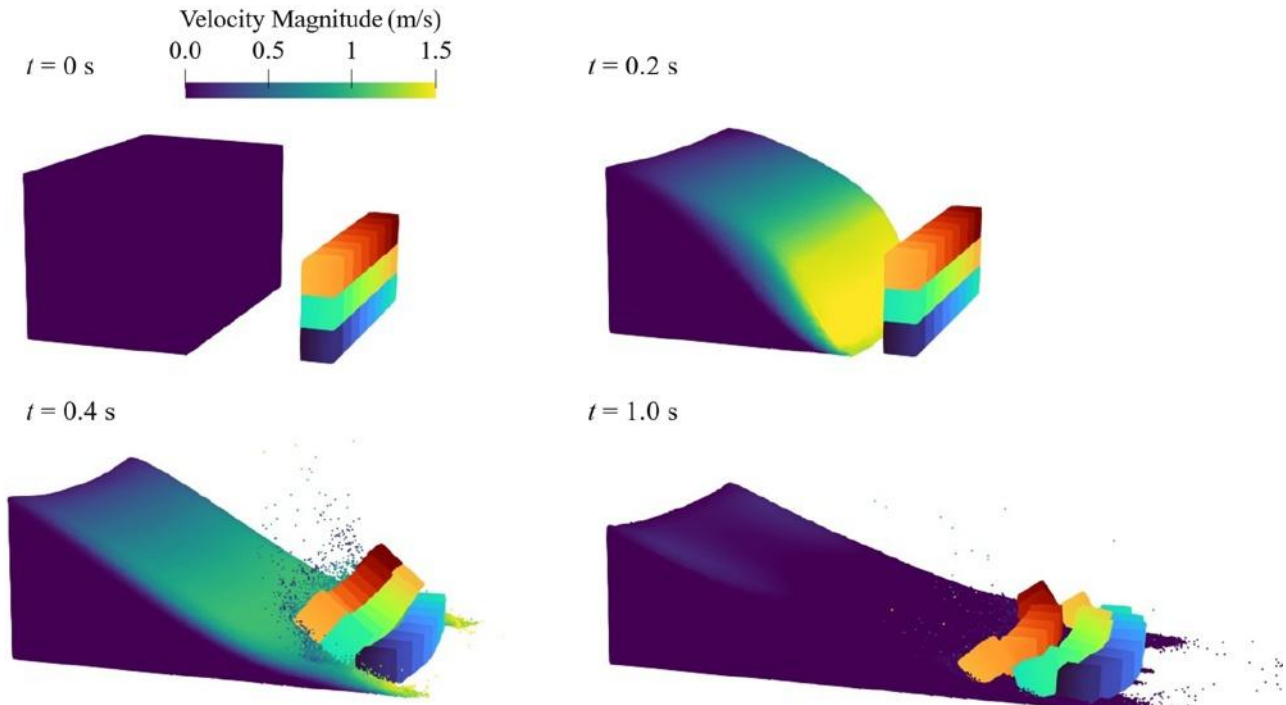


图 25。颗粒流冲击由 24 立方箱组成的壁面的模拟结果。

时间积分中的映射算法。但是，增加的成本占整体仿真时间的比例是相对边缘的。

还发现，粒子相互作用的 `kerinteraction` 占计算时间的最大比例。相比之下，边界处理的计算成本相对较小:用于 `cDBC` 的 `KerCDBC` 只需要 3.2% 的 `kerinteraction`，而用于 `mDBC` 的 `KerMDBC` 则需要 7.74%。这一发现挑战了使用固定鬼影技术的边界处理会显著增加计算成本的观点。

颗粒间距进一步细化为  $dp = 0.0005\text{ m}$ ，颗粒柱高度调整为  $0.08\text{ m}$ 。该配置可模拟总共 8670 万个颗粒，其中包括 8070 万个材料颗粒和 600 万个边界颗粒，这创下了在单个 GPU 上进行颗粒流模拟的新记录。仿真在 GeForce RTX 4090 GPU 24 GB 上进行，FPS 为 4.6(例如，在大约 1.2 小时内完成 20,000 个时间步)。在这种情况下，启用了 2.5.2 节中描述的无噪声应力处理。图 23 显示了最佳分辨率下的模拟结果。

结果表明，利用 `geodualspphysics` 可以获得稳定、无噪声的应力场。如此高分辨率的模拟捕捉到了多个剪切带形成和演化的精细尺度细节。以实际计算速度模拟大量粒子的能力，也使滑坡模拟等大规模的现实应用成为可能。值得注意的是，通过使用具有更大内存容量的 GPU，可以在 `geodualspphysics` 中实现更精细分辨率和更大数量粒子(例如，超过 1 亿个粒子)的模拟。

为了进一步评估与 Project Chrono 的耦合性能，采用了 Martínez-Estévez et al.[35]在 `dualspphysics` -Chrono 中流体冲击防波堤的情形配置。该原始案例是指重力驱动的水柱冲击 24 立方箱块的情况。在本研究中，将水柱替换为颗粒柱，其性质为  $\rho = 2100\text{ kg/m}^3$ ,  $E = 10\text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\phi = 25^\circ$ ,  $c = 0\text{ kPa}$ ,  $\psi = 0^\circ$  考虑到颗粒流的有限跑出，柱与立方体之间的距离缩短至  $0.2\text{ m}$ 。立方体箱体的材料属性设定为软木材。详细的数值设置，读者可参考 Martínez-Estévez et al.[35]或附带的源代码中提供的文件。

性能分析以固定的时间步长( $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$  秒)在  $0.006\text{ m}$  到  $0.002\text{ m}$  的初始间隔上运行 2000 个计算步骤。图 24 给出了总模拟运行时、SPH 运行时、Chrono 运行时以及 Chrono 运行时相对于总运行时的百分比(% Chrono)。与 Martínez-Estévez 等人的发现类似，粒子数的增加直接提高了 SPH 运行时间，但对 Project Chrono 运行时间的影响较小。随着粒子分辨率的提高，`geodualspphysics` 显示出与 `dualspphysics` 相似的 % Chrono 趋势。正如分析分析中所讨论的，原始 `dualspphysics` 的 % Chrono 略高是由于使用 `dualspphysics` 进行流体模拟的 SPH 运行时间较短。

图 25 为颗粒柱撞击箱壁的完整模拟结果。模拟中捕捉到了颗粒物料的流动过程、与刚体的碰撞过程以及多体碰撞过程。

## 7. 结论

这项工作提出了一个开源的，高性能的 SPH 求解器，`geodualspphysics`，专门用于大变形地质力学建模。该框架介绍了四个核心发展:(1)用于模拟特大变形地质材料的稳定、无噪声应力分辨率，(2)具有两种边界处理选项的一阶一致固体边界建模:扩展修改的动态边界条件(mDBC)和修正的虚拟边界条件(cDBC)，(3)利用 `dualspphysics` 中固有的 c

uda 并行 SPH 框架实现 gpu 加速计算，以及(4)通过与 Project Chrono 集成与多体系统的双向耦合。求解器为涉及数千万个粒子的系统实现了实用的计算速度，同时保持了与 Windows 和 Linux 环境的跨平台兼容性。

与最先进的地质力学 SPH 求解器相比，`geodualspphysics` 在内存效率和计算速度方面都有显著提高。新求解器的准确性和性能通过六项基准测试进行了验证，包括岩土失效、固体边界上的冲击力评估以及岩土材料-多体系统相互作用。这些功能将求解器定位为一种多功能工具，可用于地质灾害缓解(例如，滑坡)，岩土工程操作(例如，土壤耕作)和地形力学(例如，越野车辆机动)的潜在应用。将在未来的工作中探索开发的求解器在具有复杂几何形状的现实工程场景中的应用。进一步的发展将集中在通过一致性校正提高精度，更多的边界条件选项(例如，围应力边界)，通过可变分辨率方案的多尺度建模，耦合流体-岩土-结构模拟(例如，波浪-海底相互作用)，热-流体力学耦合，以及增强的并行化，以进一步扩大其工程和科学用途。

## 信用作者贡献声明

**冯若峰:**写作-审编，写作-原稿，可视化，验证，软件，方法论，调查，概念化。**赵继东:**写作-审编、监督、资源、资金获取、概念化。**Georgios Fourtakas:**写作-评审与编辑、监督、方法论、概念化。**Benedict D Rogers:**写作-审查和编辑，监督，方法论，概念化。

## 利益竞争声明

作者声明，他们没有已知的竞争经济利益或个人关系，可能会影响本文所报道的工作。

## 鸣谢

本工作得到国家自然科学基金(重点项目#52439001)和香港研究资助局(GRF 16203123, 16208224, 16217225, CRF C7085-24G, RIF R6008-24, TRS T22-607/24N 和 T22-606/23-R)的资助。第一作者感谢使用了曼彻斯特大学的计算共享设施。

## 数据可用性

我们在附加文件步骤中共享了代码/数据。

## 参考资料

[1] S. Zhao, J. Zhao, SudoDEM: Unleashing the predictive power of the discrete element method on simulation for non-spherical granular particles, *Computer Physics Communications* 259 (2021) 107670.

[2] Y.H. Shi, N. Guo, Z.X. Yang, GeoTaichi: A Taichi-powered high-performance numerical simulator for multiscale geophysical problems, *Computer Physics Communications* 301 (2024) 109219.

[3] A.P. Das, J. Zhao, T. Sweißen, Micromechanical modeling of triphasic granular media, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 122 (18) (2025) e2420314122.

[4] A. Yerro, K. Soga, J. Bray, Runout evaluation of Oso landslide with the material point method, *Canadian Geotechnical Journal* 56 (9) (2019) 1304–1317.

[5] H. Chen, S. Zhao, J. Zhao, X. Zhou, DEM-enriched contact approach for material point method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 404 (2023) 115814.



- [6] J. Yu, J. Zhao, W. Liang, S. Zhao, A semi-implicit material point method for coupled thermo-hydro-mechanical simulation of saturated porous media in large deformation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 418 (2024) 116462.
- [7] J.Y. Chen, F.S. Lien, C. Peng, E. Yee, GPU-accelerated smoothed particle hydrodynamics modeling of granular flow, *Powder Technology* 359 (2020)94–106.
- [8] J.Y. Chen, D.L. Feng, F.S. Lien, E. Yee, S.X. Deng, F. Gao, C. Peng, Numerical modelling of interaction between aluminium structure and explosion in soil, *Applied Mathematical Modelling* 99 (2021) 760–784.
- [9] H.H. Bui, G.D. Nguyen, Smoothed particle hydrodynamics (SPH) and its applications in geomechanics: From solid fracture to granular behaviour and multiphase flows in porous media, *Computers and Geotechnics* 138 (2021)104315.
- [10] R. Feng, J. Zhao, J. Chen, A 3D multiphase SPH framework for modelling soil- water interaction in rainfall-landslide-tsunami cascades, *Eng. Geo.* (2026) 108495,<https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2025.108495>.
- [11] L. Monforte, P. Navas, J.M. Carbonell, M. Arroyo, A. Gens, Low-order stabilized finite element for the full Biot formulation in soil mechanics at finite strain, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 43 (7) (2019) 1488–1515.
- [12] Y.F. Jin, Z.Y. Yin, Two-phase PFEM with stable nodal integration for large deformation hydromechanical coupled geotechnical problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 392 (2022) 114660.
- [13] T. Rabczuk, H. Ren, A peridynamics formulation for quasi-static fracture and contact in rock, *Engineering Geology* 225 (2017) 42–48.
- [14] C. Yang, F. Zhu, J. Zhao, A multi-horizon fully coupled thermo-mechanical peridynamics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 191 (2024) 105758.
- [15] C. Yang, J. Zhao, F. Zhu, R. Feng, A multi-horizon peridynamics for coupled fluid flow and heat transfer, *Journal of Fluid Mechanics* 1010 (2025) A66.
- [16] S. Zhang, C. Zhang, X. Hu, S.D. Lourenço, A Riemann-based SPH method for modelling large deformation of granular materials, *Computers and Geotechnics* 167 (2024) 106052.
- [17] S. Zhang, F. Wang, X. Hu, S.D. Lourenço, A unified transport-velocity formulation for SPH simulation of cohesive granular materials, *Computers and Geotechnics* 181 (2025) 107139.
- [18] S. Zhang, D. Wu, X. Hu, C.E. Choi, S.D. Lourenço, An efficient SPH framework for modeling binary granular mixtures and implications for granular flows, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 49 (3) (2025) 815–838.
- [19] T.N. Hoang, H.H. Bui, T.T. Nguyen, T.V. Nguyen, G.D. Nguyen, Development of free-field and compliant base SPH boundary conditions for large deformation seismic response analysis of geomechanics problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 432 (2024) 117370.
- [20] R. Feng, G. Fourtakas, B.D. Rogers, D. Lombardi, Modelling internal erosion using 2D smoothed particle hydrodynamics (SPH), *Journal of Hydrology* 639 (2024)131558.
- [21] R. Feng, G. Fourtakas, B.D. Rogers, D. Lombardi, A general smoothed particle hydrodynamics (SPH) formulation for coupled liquid flow and solid deformation in porous media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 419 (2024) 116581.
- [22] H. Ikari, H. Gotoh, Numerical simulation of the collapse of a bidispersed granular column using DEM and elastoplastic SPH, *Computational Particle Mechanics* (2025) 1–12.
- [23] Y. Wang, W. Wu, A SPH Model Bridging Solid-and Fluid-Like Behaviour in Granular Materials, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 49 (2) (2025) 738–755.
- [24] R. Vacondio, C. Altomare, M. De Leffe, X. Hu, D. Le Touz’e, S. Lind, J.C. Marongiu, S. Marrone, B.D. Rogers, A. Souto-Iglesias, Grand challenges for smoothed particle hydrodynamics numerical schemes, *Computational Particle Mechanics* 8 (2021)575–588.
- [25] C. Peng, S. Wang, W. Wu, H.S. Yu, C. Wang, J.Y. Chen, LOQUAT: an open-source GPU-accelerated SPH solver for geotechnical modeling, *Acta Geotechnica* 14 (2019) 1269–1287.
- [26] E. Yang, H.H. Bui, H. De Sterck, G.D. Nguyen, A. Bouazza, A scalable parallel computing SPH framework for predictions of geophysical granular flows, *Computers and Geotechnics* 121 (2020) 103474.
- [27] C. Huang, Y. Sun, Y. An, C. Shi, C. Feng, Q. Liu, X. Yang, X. Wang, Three-dimensional simulations of large-scale long run-out landslides with a GPU-accelerated elasto-plastic SPH model, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 145 (2022) 132–148.
- [28] M. Gholami Korzani, S.A. Galindo-Torres, A. Scheuermann, D.J. Williams, SPH approach for simulating hydro-mechanical processes with large deformations and variable permeabilities, *Acta Geotechnica* 13 (2018) 303–316.
- [29] A. Amicarella, S. Manenti, R. Albano, G. Agate, M. Paggi, L. Longoni, D. Mirauda, L. Ziane, G. Viccione, S. Todeschini, A. Sole, SPHERA v. 9.0. 0: A Computational Fluid Dynamics research code, based on the Smoothed Particle Hydrodynamics mesh-less method, *Computer Physics Communications* 250 (2020) 107157.
- [30] H.H. Bui, T. Viet, N.G.D. Nguyen, GeoXPM: Particle-based continuum solutions for extreme geoen지니어ing, geomechanics & geophysics applications, *Tutorial Manual* (2023).
- [31] R. Feng, G. Fourtakas, B.D. Rogers, D. Lombardi, Large deformation analysis of granular materials with stabilized and noise-free stress treatment in smoothed particle hydrodynamics (SPH), *Computers and Geotechnics* 138 (2021) 104356.
- [32] J.M. Domínguez, G. Fourtakas, C. Altomare, R.B. Canelas, A. Tafuni, O. Garcia-Feal, I. Martínez-Estévez, A. Mokos, R. Vacondio, A.J. Crespo, B.D. Rogers,

- [33] J. O'Connor, B.D. Rogers, A fluid–structure interaction model for free-surface flows and flexible structures using smoothed particle hydrodynamics on a GPU, Journal of Fluids and Structures 104 (2021) 103312.
- [34] S. Long, X. Fan, C. Li, Y. Liu, S. Fan, X.W. Guo, C. Yang, VecDualSPHysics: A vectorized implementation of Smoothed Particle Hydrodynamics method for simulating fluid flows on multi-core processors, Journal of Computational Physics 463 (2022) 111234.
- [35] I. Martínez-Estévez, J.M. Domínguez, B. Tagliaferro, R.B. Canelas, O. García-Feal, A.J. Crespo, M. Gómez-Gesteira, Coupling of an SPH-based solver with a multiphysics library, Computer Physics Communications 283 (2023) 108581.
- [36] C. Cen, G. Fourtakas, S. Lind, B.D. Rogers, A single-phase GPU-accelerated surface tension model using SPH, Computer Physics Communications 295 (2024) 109012.
- [37] Y. Zhan, M. Luo, A. Khayyer, DualSPHysics+: An enhanced DualSPHysics with improvements in accuracy, energy conservation and resolution of the continuity equation, Computer Physics Communications 306 (2025) 109389.
- [38] F. Ricci, R. Vacondio, J.M. Domínguez, A. Tafuni, Three-dimensional variable resolution for multi-scale modeling in Smoothed Particle Hydrodynamics, Computer Physics Communications (2025) 109609.
- [39] D. Violeau, B.D. Rogers, Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for free-surface flows: past, present and future, Journal of Hydraulic Research 54 (1) (2016) 1–26.
- [40] X. Zhou, D. Lu, Y. Zhang, X. Du, T. Rabczuk, An open-source unconstrained stress updating algorithm for the modified Cam-clay model, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 390 (2022) 114356.
- [41] J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics, Annual review of astronomy and astrophysics 30 (1992) 543–574. Vol. 30 (1992-25826 09-90), p. 543-574.
- [42] M. Antuono, A. Colagrossi, S. Marrone, Numerical diffusive terms in weakly-compressible SPH schemes, Computer Physics Communications 183 (12) (2012) 2570–2580.
- [43] D. Molteni, A. Colagrossi, A simple procedure to improve the pressure evaluation in hydrodynamic context using the SPH, Computer Physics Communications 180 (6) (2009) 861–872.
- [44] J.P. Morris, P.J. Fox, Y. Zhu, Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, Journal of Computational Physics 136 (1) (1997) 214–226.
- [45] R. Feng, G. Fourtakas, B.D. Rogers, D. Lombardi, Two-phase fully-coupled smoothed particle hydrodynamics (SPH) model for unsaturated soils and its application to rainfall-induced slope collapse, Computers and Geotechnics 151 (2022) 104964.
- [46] A. Khayyer, Y. Shimizu, C.H. Lee, A. Gil, H. Gotoh, J. Bonet, An improved updated Lagrangian SPH method for structural modelling, Computational Particle Mechanics 11 (3) (2024) 1055–1086.
- [47] S.J. Lind, R. Xu, P.K. Stansby, B.D. Rogers, Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves, Journal of Computational Physics 231 (4) (2012) 1499–1523.
- [48] A. Skillen, S. Lind, P.K. Stansby, B.D. Rogers, Incompressible smoothed particle hydrodynamics (SPH) with reduced temporal noise and generalised Fickian smoothing applied to body–water slam and efficient wave–body interaction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 265 (2013) 163–173.
- [49] A. Khayyer, H. Gotoh, Y. Shimizu, Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context, Journal of Computational Physics 332 (2017) 236–256.
- [50] M. Antuono, P.N. Sun, S. Marrone, A. Colagrossi, The  $\delta$ -ALE-SPH model: An arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the  $\delta$ -SPH model with particle shifting technique, Computers & Fluids 216 (2021) 104806.
- [51] Y. Shimizu, H. Gotoh, Volume-conserved wavy interface boundary for  $\delta$ -SPH-based numerical wave flume, Coastal Engineering Journal 67 (2) (2025) 214–231.
- [52] T. Gotoh, D. Sakoda, A. Khayyer, C.H. Lee, A. Gil, H. Gotoh, J. Bonet, An enhanced total Lagrangian SPH for non-linear and finite strain elastic structural dynamics, Computational Mechanics (2025) 1–33.
- [53] D. Wu, X. Tang, S. Zhang, X. Hu, Unified non-hourglass formulation for total Lagrangian SPH solid dynamics, Computational Mechanics 75 (3) (2025) 1081–1113.
- [54] S. Zhang, D. Wu, S.D. Lourenço, X. Hu, A generalized non-hourglass updated Lagrangian formulation for SPH solid dynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 440 (2025) 117948.
- [55] A. English, J.M. Domínguez, R. Vacondio, A.J.C. Crespo, P.K. Stansby, S.J. Lind, L. Chiapponi, M. Gómez-Gesteira, Modified dynamic boundary conditions (mDBC) for general-purpose smoothed particle hydrodynamics (SPH): Application to tank sloshing, dam break and fish pass problems, Computational Particle Mechanics 9 (5) (2022) 1–15.
- [56] M.B. Liu, G.R. Liu, Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics, Applied Numerical Mathematics 56 (1) (2006) 19–36.
- [57] J.J. Monaghan, A. Kos, N. Issa, Fluid motion generated by impact, Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean engineering 129 (6) (2003) 250–259.
- [58] Alessandro Tasora, Radu Serban, Hammad Mazhar, Arman Pazouki, Daniel Melanz, Jonathan Fleischmann, Michael Taylor, Hiroyuki Sugiyama, Dan Negrut, Chrono: An open source multi-physics dynamics engine, in: High Performance Computing in Science and Engineering: Second International Conference, HPCSE 2015, Sol’ an , Czech Republic, May 25–28, 2015, Revised Selected Papers 2, Springer International Publishing, 2016, pp. 19–49.
- [59] A. Tasora, M. Anitescu, A convex complementarity approach for simulating large granular flows, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics 5 (3) (2010) 1–10.

- [60] W. Hu, M. Rakhsha, L. Yang, K. Kamrin, D. Negrut, Modeling granular material dynamics and its two-way coupling with moving solid bodies using a continuum representation and the SPH method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 385 (2021) 114022.
- [61] A.C. Crespo, J.M. Dominguez, A. Barreiro, M. Gómez-Gesteira, B.D. Rogers, GPUs, a new tool of acceleration in CFD: efficiency and reliability on smoothed particle hydrodynamics methods, *PloS one* 6 (6) (2011) e20685.
- [62] H.H. Bui, R. Fukagawa, An improved SPH method for saturated soils and its application to investigate the mechanisms of embankment failure: Case of hydrostatic pore-water pressure, *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics* 37 (1) (2013) 31–50.
- [63] Z. Liu, H.A. Koyi, J.O. Swantesson, F. Nilfouroushan, Y. Reshetuk, Kinematics and 3-D internal deformation of granular slopes: analogue models and natural landslides, *Journal of Structural Geology* 53 (2013) 27–42.
- [64] M. Gomez-Gesteira, B.D. Rogers, R.A. Dalrymple, A.J. Crespo, State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows, *Journal of Hydraulic Research* 48 (sup1) (2010) 6–27.
- [65] S. Moriguchi, R.I. Borja, A. Yashima, K. Sawada, Estimating the impact force generated by granular flow on a rigid obstruction, *Acta Geotechnica* 4 (2009) 57–71.
- [66] Z. Lei, B. Wu, S. Wu, Y. Nie, S. Cheng, C. Zhang, A material point-finite element (MPM-FEM) model for simulating three-dimensional soil-structure interactions with the hybrid contact method, *Computers and Geotechnics* 152 (2022) 105009.
- [67] M. Pica Ciamarra, A.H. Lara, A.T. Lee, D.I. Goldman, F.I. Vishik, H.L. Swinney, Dynamics of drag and force distributions for projectile impact in a granular medium, *Physical Review Letters* 92 (19) (2004) 194301.
- [68] C. Liu, Q. Sun, G.G. Zhou, Coupling of material point method and discrete element method for granular flows impacting simulations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 115 (2) (2018) 172–188.
- [69] Y. Jiang, M. Li, C. Jiang, F. Alonso-Marroquin, A hybrid material-point spheropolygon-element method for solid and granular material interaction, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 121 (14) (2020) 3021–3047.